Дәрежелік қатар түсінігі

Оқу мақсаты:

12.5.1.5

$\sum_{r=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^r = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$ дәрежелік қатар ұғымын біледі;

Дәрежелік қатар түсінігі

Қатардың мүшелері тұрақты сан емес, белгілі бір жиында анықталған функция болсын. Мұндай қатарларды функционалдық қатарлар деп атаймыз.

Мүшелері дәрежелік функция болатын қатарды дәрежелік қатар деп атаймыз.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

1

түріндегі қатар x айнымалысының дәрежесі бойынша орналасқан **дәрежелік қатар** деп аталады, мұндағы $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ - тұрақты сандар.

Дәрежелік қатардың жинақталу радиусы

х-тің әртүрлі мәндерінде жинақталатын немесе жинақталмайтын әртүрлі сандық жиындар алынады.

(1) дәрежелік қатар жинақталатын х-тің мәндері жиынтығы – дәрежелік қатардың жинақталу радиусы деп аталады.

Совокупность значений х, при которых степенной ряд (1) сходится, называется областью сходимости степенного ряда.

Частичная сумма степенного ряда

$$S_n = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + \ldots + C_n \cdot x^n$$

будет функцией от переменной *x* .

Следовательно, последовательность частичных сумм является функциональной последовательностью и сумма ряда будет зависеть от *x*. Она будет определена в области сходимости ряда.

1-мысал

Дәрежелік қатардың жинақталу радиусын табыңыз:

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

Шешуі:

Берілген қатар еселігі $q=x$ **тең геометриялық прогрессияны береді.**

Бұл қатар $|q|=|x|<1$ **болғанда жинақталады, яғни**

$$|q|=|x|<1 \Rightarrow -1<x<1$$

Сонымен, берілген қатардың жинақталу радиусы: $(-1,1)$

Абель теоремасы

1

Егер дәрежелік қатар х-тің $x = x_0 \neq 0$ ***мәнінде жинақталатын болса, ол*** $|x| < |x_0|$ ***теңсіздігін қанағаттандыратын х-тің барлық мәндерінде абсолютті жинақталады.***

АБЕЛ теоремасы

2

Егер дәрежелік қатар х-тің $x = x_0 \neq 0$ ***мәнінде жинақталмайатын болса, ол*** $|x| > |x_0|$ ***теңсіздігін қанағаттандыратын х-тің барлық мәндерінде де жинақталмайды.***

Анықтама.

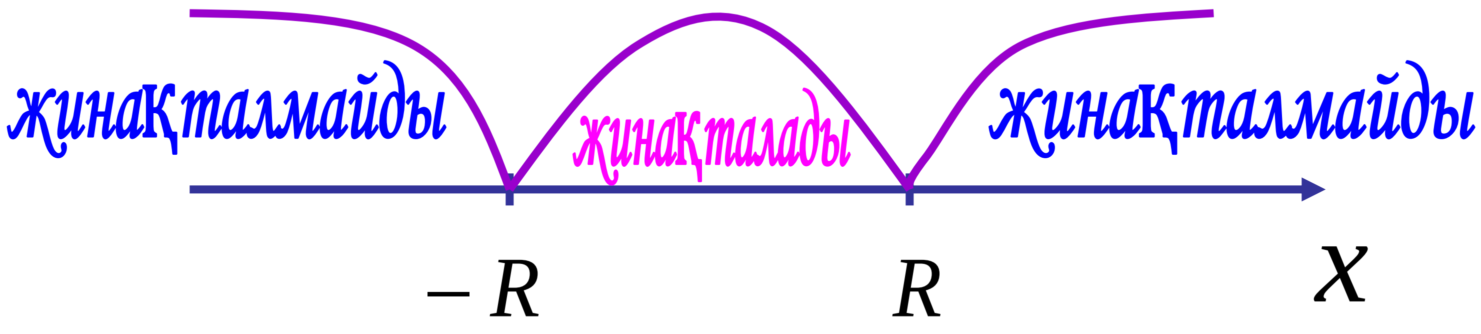
Егер дәрежелік қатар $|x| < R$ болғанда **жинақталатын қатар**, ал $|x| > R$ болғанда **жинақталмайтын қатар** болса, онда R саны дәрежелік қатардың жинақталу радиусы деп аталады.

Егер $R \geq 0$ **мәнінде**

$|x| < R$ **қатар жинақталса;**

$|x| > R$ **қатар жинақталмаса**

онда:



Дәрежелік қатардың жинақталу радиусы

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$$

Даламбер белгісі

2-мысал

Дәрежелік қатардың жинақталу радиусын табыңыз:

$$1+\frac{2x}{3^2\cdot\sqrt{3}}+\frac{4x^2}{5^2\cdot\sqrt{3^2}}+\ldots+\frac{2^n\cdot x^2}{(2n+1)^2\cdot\sqrt{3^n}}+\ldots$$

Шешуі:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}\cdot\frac{(2n+3)^2\sqrt{3^{n+1}}}{2^{n+1}}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Қатардың жинақталу интервалы:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Интервалдың шеткі нүктелерін тексерейік:

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots$$

Бұл таңбасы ауыспалы қатар.

1 Қатар мүшелері модульдері бойынша кемімелі

$$1 > \frac{1}{3^2} > \frac{1}{5^2} > \ldots > \frac{1}{(2n+1)^2} > \ldots$$

2 **Тізбектің жалпы мүшесі 0-ге тең.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = 0$$ **қатар жинақталады.**

$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **болғанда**

Қатар келесі түрде:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots$$

Бұл $\alpha = 2$ **тең болғандағы жинақталатын гормониялық қатар**

Қатардың жинақталу облысы: $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2} \right]$

Сходимость степенного ряда

Пример 3 Найти область сходимости степенного ряда :

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

Заданный ряд неполный. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$U_n=(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$U_{n+1}=(-1)^{n+2}\frac{x^{2(n+1)-1}}{2(n+1)-1}=(-1)^{n+2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-x^2(2n-1)}{2n+1}\right|=$$

Сходимость степенного ряда

$$= x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = x^2$$

Ряд абсолютно сходиться, если $x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

Исследуем поведение ряда на концах интервала:

При *x = -1* имеем ряд: $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$

$$\left.\begin{aligned} &1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{7} > \ldots \\ &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Ряд сходится по признаку Лейбница

Сходимость степенного ряда

При $x = 1$ имеем ряд:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Ряд также сходится по признаку Лейбница.

Следовательно областью сходимости исходного ряда является отрезок [-1; 1]

Сходимость степенного ряда

Пример 3 Найти область сходимости степенного ряда :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^{n-1}}$$

Найдем радиус сходимости по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n}$$

Сходимость степенного ряда

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2$$

Ряд абсолютно сходиться при $-2 < x+2 < 2 \quad \Rightarrow \quad -4 < x < 0$

Исследуем поведение ряда на концах интервала:

При $x = -4$ имеем ряд: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \Rightarrow$ ряд сходится по признаку Лейбница

При $x = 0$ имеем ряд: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится

Следовательно областью сходимости исходного ряда является интервал [-4; 0)

Жеке жұмыс

Пример 1

Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!}$.

Решение.

Сделаем замену: $u = x + 3$. Тогда ряд принимает вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$. Вычислим радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Соответственно, интервал сходимости равен $(-\infty, \infty)$.

Пример 2

Определить радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$.

Решение.

Вычислим радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Рассмотрим сходимость в конечных точках.

Если $x = -1$, то мы имеем расходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$. Если $x = 1$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n$ также расходится.

Следовательно, исходный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ сходится на открытом интервале $(-1, 1)$.

Пример 3

Найти радиус и интервал сходимости ряда

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$$

Решение.

Здесь $a_n=\frac{1}{n}$ и $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$. Радиус сходимости будет равен

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

В точке $x=-1$ мы имеем сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. При $x=1$ получаем расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Таким образом, заданный ряд сходится на полуоткрытом интервале $[-1,1)$.

Пример 4

При каких значениях x ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ сходится?

Решение.

Найдем радиус и интервал сходимости данного ряда.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{2}{n}}{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Если $x = -1$, то получаем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

который сходится по признаку Лейбница.

Если же $x = 1$, то мы имеем расходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Таким образом, интервал сходимости заданного ряда равен $[-1, 1)$.

Пример 5

Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-2)^n}{n^2}$.

Решение.

Сделаем замену: $u = x - 2$. Тогда ряд запишется в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n u^n}{n^2}$. Вычислим радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

Исследуем сходимость в конечных точках интервала.

Если $u = -1$, то такой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

будет сходиться как обощенный гармонический ряд с показателем степени $p = 2 > 1$.

Если $u = 1$, то получаем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n u^n}{n^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 1^n}{n^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$,

который также сходится по признаку Лейбница.

Таким образом, интервал сходимости для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n u^n}{n^2}$ равен $[-1,1]$. Поскольку новая и старая переменные связаны соотношением $u = x - 2$, то интервал сходимости исходного ряда будет равен

$$-1 \le x-2 \le 1 \quad \text{или} \quad 1 \le x \le 3.$$

Ответ: исходный ряд сходится в интервале $[1,3]$.