Дәрежелік қатар түсінігі

Оқу мақсаты:

12.5.1.5

$\sum_{r=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^r = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots$ дәрежелік қатар ұғымын біледі;

Сходимость степенного ряда

Пример 3 Найти область сходимости степенного ряда :

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

Заданный ряд неполный. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$U_n=(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$U_{n+1}=(-1)^{n+2}\frac{x^{2(n+1)-1}}{2(n+1)-1}=(-1)^{n+2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-x^2(2n-1)}{2n+1}\right|=$$

Сходимость степенного ряда

$$= x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = x^2$$

Ряд абсолютно сходиться, если $x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

Исследуем поведение ряда на концах интервала:

При $x = -1$ имеем ряд: $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$

$$\left.\begin{aligned} & 1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{7} > \ldots \\ & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Ряд сходится по признаку Лейбница

Сходимость степенного ряда

При *x* = *1* имеем ряд:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Ряд также сходится по признаку Лейбница.

Следовательно областью сходимости исходного ряда является отрезок [-1; 1]

Сходимость степенного ряда

Пример 3 Найти область сходимости степенного ряда :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$$

Найдем радиус сходимости по формуле:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$a_n=\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}} \qquad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$$

Сходимость степенного ряда

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2$$

Ряд абсолютно сходиться при $-2 < x+2 < 2 \quad \Rightarrow \quad -4 < x < 0$

Исследуем поведение ряда на концах интервала:

При $x = -4$ имеем ряд: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots \quad ; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \quad \Rightarrow$ ряд сходится по признаку Лейбница

При $x = 0$ имеем ряд: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится

Следовательно областью сходимости исходного ряда является интервал [-4; 0)

Жеке жұмыс

Пример 1

Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!}$.

Решение.

Сделаем замену: $u = x + 3$. Тогда ряд принимает вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$. Вычислим радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Соответственно, интервал сходимости равен $(-\infty, \infty)$.

Пример 2

Определить радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$.

Решение.

Вычислим радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Рассмотрим сходимость в конечных точках.

Если $x = -1$, то мы имеем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$. Если $x = 1$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n$ также расходится.

Следовательно, исходный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$ сходится на открытом интервале $(-1, 1)$.

Пример 3

Найти радиус и интервал сходимости ряда

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$$

Решение.

Здесь $a_n=\frac{1}{n}$ и $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$. Радиус сходимости будет равен

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

В точке $x=-1$ мы имеем сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. При $x=1$ получаем расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Таким образом, заданный ряд сходится на полуоткрытом интервале $[-1,1)$.

Пример 4

При каких значениях x ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ сходится?

Решение.

Найдем радиус и интервал сходимости данного ряда.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}+\frac{2}{n}}{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Если $x = -1$, то получаем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1},$$

который сходится по признаку Лейбница.

Если же $x = 1$, то мы имеем расходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}.$$

Таким образом, интервал сходимости заданного ряда равен $[-1,1)$.

Пример 5

Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x-2)^n}{n^2}$.

Решение.

Сделаем замену: $u = x - 2$. Тогда ряд запишется в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n u^n}{n^2}$. Вычислим радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = 1.$$

Исследуем сходимость в конечных точках интервала.

Если $u = -1$, то такой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

будет сходиться как обощенный гармонический ряд с показателем степени $p = 2 > 1$.

Если $u = 1$, то получаем знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

который также сходится по признаку Лейбница.

Таким образом, интервал сходимости для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n u^n}{n^2}$ равен $[-1, 1]$. Поскольку новая и старая переменные связаны соотношением $u = x - 2$, то интервал сходимости исходного ряда будет равен

$$-1 \le x - 2 \le 1 \quad \text{или} \quad 1 \le x \le 3.$$

Ответ: исходный ряд сходится в интервале $[1, 3]$.

Мысал 1. дәрежелік қатарының жинақталу радиусын және интервалын табыңыз.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^4}{4^n}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)!}$$

Функцияны дәрежелік қатарларға жіктеу

,
,
,
,

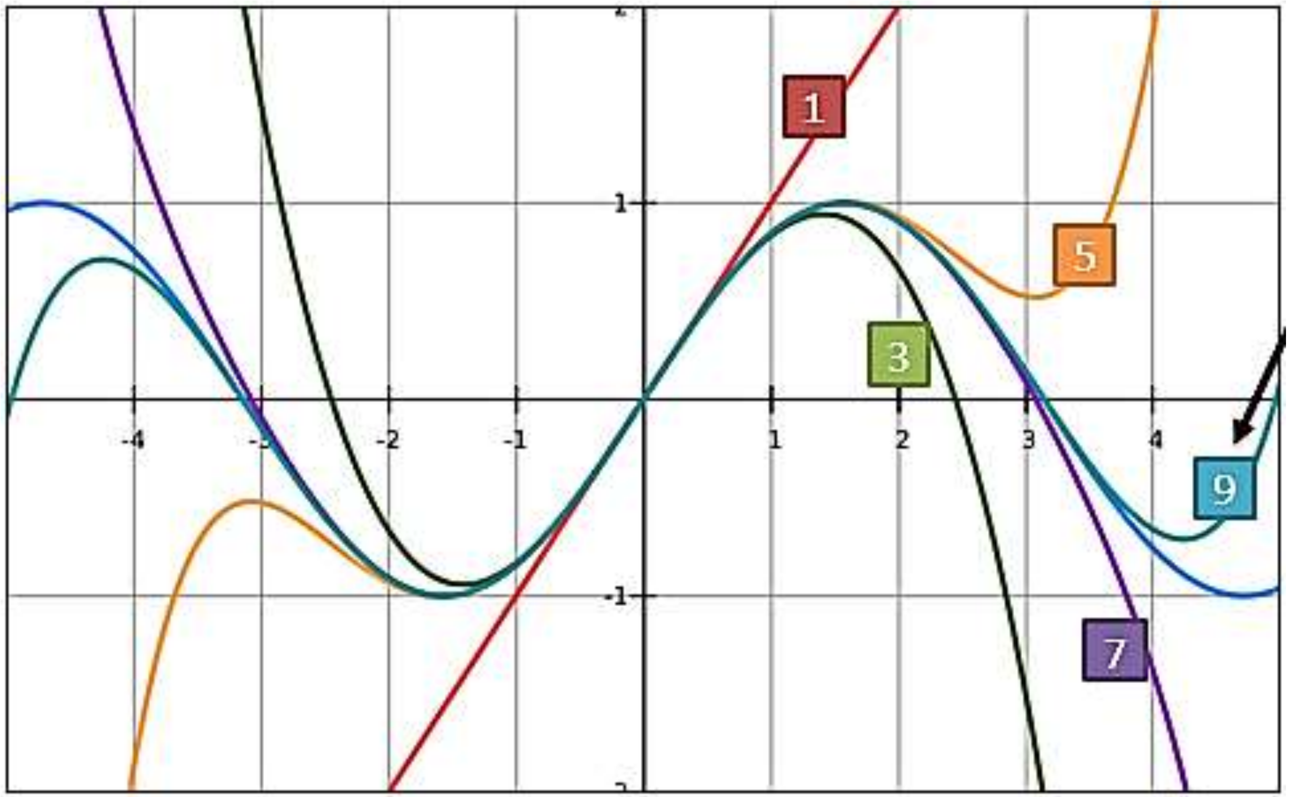
12.5.1.9 $(1+x)^\alpha$ e^x $\sin x$ $\cos x$ $\ln(1+x)$ функцияларын Маклорен қатарына жіктеу;

$f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде шексіз дифференциалданатын болсын.

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

түріндегі қатар Маклорен қатары деп аталады.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$



$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$$

1. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x}$ функциясын х дәрежесі бойынша қатарға жіктеңіз.

2. $f(x)=\ln(10+x)$ функциясын х дәрежесі бойынша қатарға жіктеңіз.

Шешімі:

1. $\sin\alpha$, $\alpha=2x$ стандарт жіктелуін қолданамыз. Онда:

$$f(x)=\frac{\sin 2x}{x}=2-\frac{2^3x^2}{3!}+\frac{2^5x^4}{5!}-\frac{2^7x^6}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot 2^{2n-1}\cdot x^{2n-2}+\ldots$$

2. $\ln(1+\alpha)$ стандарт жіктелуін қолданамыз. $\ln(ab)=\ln a+\ln b$, $\alpha=\dfrac{x}{10}$ екенін ескереміз. Онда

$$f(x)=\ln(10+x)=\ln 10+\frac{x}{10}-\frac{x^2}{2\cdot 10^2}+\frac{x^3}{3\cdot 10^3}-\frac{x^4}{4\cdot 10^4}+\frac{x^5}{5\cdot 10^5}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n\cdot 10^n}$$