Қатардың жинақталуының қажетті шарты

12.5.1.3

қатардың жинақталуының қажетті шартын біледі және қолданады

Қатардың *жинақталуының қажетті шартын* қарастыру қажет: егер

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

сандық қатар жинақталса, онда $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Қатардың жинақсыздығының жеткілікті шарты:

Егер $\lim_{n\to\infty} u_n = a \neq 0$, онда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

сандық қатары жинақталмайды.

Егер $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ болса, онда сандық қатар жинақталады» тұжырымы дұрыс па?

Бұл тұжырым әрқашан дұрыс бола бермейді.

Егер қатардың *жалпы* мүшесі нолге ұмтылса, онда *қатар жинақталуы да, жинақталмауы да мүмкін!*

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ түріндегі қатар гармониялық қатар деп аталады.

Мысалы, гармониялық қатарда жалпы мүшесі нөлге ұмтылады, бірақ қатар жинақталмайды. Математикалық анализ курсында гармониялық қатардың жинақталмайтындығы дәлелденген.

Жалпыланған гармониялық қатар $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

1) Берілген қатар $\alpha \leq 1$ болғанда жинақталмайды.

Мысалы, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ қатарлары жинақталмайды.

2) Берілген қатар $\alpha > 1$ болғанда жинақталады.

Мысалы, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ қатарлары жинақталады.

1-мысал. Қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2n-1}{5n^2+7}.$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-1}{5n^2+7} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2}+\frac{7}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{5+\frac{7}{n^2}} = \frac{3+0-0}{5+0} = \frac{3}{5}.$$

2-мысал. Қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{4n^7 + 5n^3 - 4}}{9n^2 - n + 12}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{4n^7 + 5n^3 - 4}}{9n^2 - n + 12} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{4n^7}{n^7} + \frac{5n^3}{n^7} - \frac{4}{n^7}}}{\frac{9n^2}{\frac{7}{3}} - \frac{n}{\frac{7}{3}} + \frac{12}{\frac{7}{3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{4 + \frac{5}{n^4} - \frac{4}{n^7}}}{\frac{9}{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\frac{4}{3}} + \frac{12}{\frac{7}{3}}} = +\infty.$$

Қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{2n}$; б) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots$;

в) $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$; г) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots$

Шешімі: а) $n \to \infty$ болғандағы жалпы мүшесінің шегін табамыз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{2n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{2n}{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n^2}}{\frac{2}{n}}=\left(\frac{1+0}{0}\right)=\infty.$$

Қатардың жинақтылығының *қажетті шарты* орындалмайды, сондықтан берілген қатар жинақталмайды.

б) жоқ; в) ия; г) ия.

Сабақтың тақырыбы

Даламбер және салыстыру белгілерінің көмегімен қатардың жинақтығын зерттеу

Оқу мақсаты:

12.5.1.4 Даламбер және салыстыру белгілерінің көмегімен қатардың жинақтығын зерттейді

Салыстыру белгілері

Салыстыру белгілерін қолданғанда зерттейтін қатарды алдын ала жинақтылығы белгілі қатармен салыстырады.

Салыстыру белгілерін қарастыру қажет:

$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$, (1)

$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$, (2)

қатарлары берілсін және барлық $u_i \leq v_i$ болсын, онда

1) (2) қатарының жинақталуынанан (1) қатарының жинақталуы шығады.
2) (1) қатарының жинақталмауынан (2) қатарының жинақталмауы шығады.

Үлкен мүшелі қатардың жинақтылығынан кіші мүшелі қатардың жинақтылығы шығады.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 3^n} + \cdots$$

қатардың жинақталуын анықтау үшін $u_n = \frac{1}{n \cdot 3^n} < \frac{1}{3^n}$ $(n \geq 2)$ теңсіздігін қолданамыз, және берілген қатарды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}, \qquad q = \frac{1}{3} < 1$$

жинақталатын қатармен салыстырамыз.

Салыстыру белгісі бойынша берілген қатар жинақталады.

Мысал: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+2}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз

Жинақтылықтың жеткілікті шартының орындалуын тексеріңіз .

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ қатары жинақталатындығы белгілі. $n = 1,2,3,\ldots$ барлық натурал сандар үшін $n^2+n+2 > n^2$ теңсіздігі орындалады. Кіші бөлшектің бөлімі үлкен болғандықтан $\frac{1}{n^2+n+2} \leq \frac{1}{n^2}$, демек, зерттеліп отырған қатар $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ қатарымен бірге жинақталады.

Мысал: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз

Шешуі: $u_n = \frac{n^2}{2^{n-1}}, \qquad u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^n},$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 2^{n-1}}{n^2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1$$

Жауабы: Берілген қатар жинақты.

Ой қозғау:

Даламбер белгісін қай уақытта қолдану керек?

1) Қатардың жалпы мүшесінің құрамында қандай да бір дәрежелік сан болса, мысалы, 2^n, 3^n, 5^n және т.с.с. Бөлімінде немесе алымында болуы маңызды емес.

2) Қатардың жалпы мүшесінде факториал болса.

1-тапсырма. Қатарды жинақтылыққа зерттеңіз

$$\sum_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{n}^2 + \boldsymbol{n} - 1}{4^{\boldsymbol{n}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^2 + (n+1) - 1}{4^{n+1}}}{\frac{n^2 + n - 1}{4^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n \cdot \left(\left((n+1)^2 + (n+1) - 1\right)\right.}{4^{n+1} \cdot (n^2 + n - 1)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n^2 + n - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{4} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2 + 3n + 1}{n^2}}{\frac{n^2 + n - 1}{n^2}} = \frac{1}{4} \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4} \cdot 1 < 1$$

Зерттелініп отырған қатар **жинақталады.**

2-тапсырма. Қатарды жинақтылыққа зерттеңіз

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$$

Общий член ряда $a_n = \frac{6^n}{n!}$

Следущий член ряда $a_{n+1} = \frac{6^{n+1}}{(n+1)!}$

Подставим это в формулу и найдем отношение следущего и предыдущего члена ряда:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{6^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{6^n}{n!}} = \frac{6^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 6^n}$$

Выполняем сокращение степеней и факториалов:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{6}{n+1}$$

Теперь найдем предел получившегося соотношения:

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{6}{n+1} = 0$$

Так как $L = 0 < 1$, то значит ряд сходится по признаку Даламбера.

3-тапсырма. Қатарды жинақтылыққа зерттеңіз

https://youtu.be/PSMQj_aHeqs

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)\cdot 5^n}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+2)}{5(n+3)} =$$

Так как получается неопределенность, то вынесем за скобки n:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\frac{2}{n})(1+\frac{2}{n})}{5n(1+\frac{3}{n})} =$$

После сокращения числителя и знаменателя на n имеем:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{2}{n})(1+\frac{2}{n})}{5(1+\frac{3}{n})} = \frac{\infty}{5} = \infty$$

Так как $L = \infty$, то по признаку Даламбера ряд расходится.

EXAMPLE 2 Investigate the convergence of the following series.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!n!}{(2n)!}$

Solution We apply the Ratio Test to each series.

(a) For the series $\sum_{n=0}^{\infty}(2^n + 5)/3^n$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2^{n+1} + 5)/3^{n+1}}{(2^n + 5)/3^n} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2^{n+1} + 5}{2^n + 5} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2 + 5\cdot 2^{-n}}{1 + 5\cdot 2^{-n}}\right) \to \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1} = \frac{2}{3}.$$

The series converges absolutely (and thus converges) because $\rho = 2/3$ is less than 1. This does *not* mean that $2/3$ is the sum of the series. In fact,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n} = \frac{1}{1 - (2/3)} + \frac{5}{1 - (1/3)} = \frac{21}{2}.$$

(b) If $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$, then $a_{n+1} = \dfrac{(2n + 2)!}{(n + 1)!(n + 1)!}$ and

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{n!n!(2n + 2)(2n + 1)(2n)!}{(n + 1)!(n + 1)!(2n)!}\\ &= \frac{(2n + 2)(2n + 1)}{(n + 1)(n + 1)} = \frac{4n + 2}{n + 1} \to 4.\end{aligned}$$

EXAMPLE 2 Investigate the convergence of the following series.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n! n!}{(2n)!}$

Solution We apply the Ratio Test to each series.

(a) For the series $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 5)/3^n$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2^{n+1} + 5)/3^{n+1}}{(2^n + 5)/3^n} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2^{n+1} + 5}{2^n + 5} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2 + 5\cdot 2^{-n}}{1 + 5\cdot 2^{-n}}\right) \to \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1} = \frac{2}{3}.$$

The series converges absolutely (and thus converges) because $\rho = 2/3$ is less than 1. This does *not* mean that $2/3$ is the sum of the series. In fact,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n} = \frac{1}{1 - (2/3)} + \frac{5}{1 - (1/3)} = \frac{21}{2}.$$

(b) If $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$, then $a_{n+1} = \dfrac{(2n + 2)!}{(n + 1)!(n + 1)!}$ and

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{n!n!(2n + 2)(2n + 1)(2n)!}{(n + 1)!(n + 1)!(2n)!} \\ &= \frac{(2n + 2)(2n + 1)}{(n + 1)(n + 1)} = \frac{4n + 2}{n + 1} \to 4.\end{aligned}$$

(c) If $a_n = 4^n n!n!/(2n)!$, then

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n n!n!}$$
$$= \frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} \to 1.$$

Because the limit is $\rho = 1$, we cannot decide from the Ratio Test whether the series converges. When we notice that $a_{n+1}/a_n = (2n+2)/(2n+1)$, we conclude that a_{n+1} is always greater than a_n because $(2n+2)/(2n+1)$ is always greater than 1. Therefore, all terms are greater than or equal to $a_1 = 2$, and the nth term does not approach zero as $n \to \infty$. The series diverges. ■

Қатарды жинақтылыққа зерттеңіз

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{3^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)^2}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n3^{n-1}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(-4)^n}$

6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2(n+2)!}{n!\, 3^{2n}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{(2n+3)\ln(n+1)}$

Жұптық жұмыс. Қатарды жинақтылыққа зерттеңіз

1) $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2^{10}}+\frac{2^3}{3^{10}}+...+\frac{2^n}{n^{10}}+...$

2) $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3\sqrt{3}}+...+\frac{n}{3^{n/2}}+...$

3) $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+...+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+...$

http://pgsksaa07.narod.ru/examples_ryad.htm

Қосымша тапсырма. Қатарды жинақтылыққа зерттеңіз

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n-1)(n+1)}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{2^n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n+1}}{n \cdot 3^{2n+1}}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n+1}}{(n-1)^2}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(n+1)!}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+2)!}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^4 \cdot 3^n}{(n+3)!}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^{3n+1}}{(n-1)!}$.