САНДЫҚ ҚАТАРЛАР

ОҚУ МАҚСАТЫ:

- 12.5.1.1 сандық қатар, қатардың жинақталуы және жинақталмауы ұғымдарын біледі;

$$\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} + \cdots + \boldsymbol{u_n} + \cdots = \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \boldsymbol{u_n}$$

мұндағы $u_n \in R$, түріндегі өрнек *сандық қатар* деп аталады.

$u_1, u_2, \cdots, u_n$ ... сандары *қатардың мүшелері*, $u_n -$ саны қатардың жалпы мүшесі деп аталады.

- Мысалы, қатардың жалпы мүшесі $U_n = \frac{(-1)^{n-1} 6^{2n-1}}{(2n-1)!}$

формуласы арқылы берілсе, онда қатар түрі былай болады:

$$6 - \frac{6^3}{3!} + \frac{6^5}{5!} - \frac{6^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 6^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Берілген мүшелер бойынша қатардың жалпы мүшесінің қарапайым формуласын жазыңыз:

a) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots;$?

b) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\cdots;$?

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\ldots;$?

d) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots.$?

Белгілі a_n жалпы мүшесі бойынша қатардың алғашқы төрт мүшесін жазыңыз:

$$a_n = \frac{2^n + 3^n}{4^n}$$

?

$$a_n = \frac{3n - 2}{n^2 + 1}$$

?

$$a_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}$$

?

АНЫҚТАМАЛАР:

- $S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \dots , S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ қосындылары *дербес қосындылар,* ал S_n – қатардың n-*ші дербес қосындысы* деп аталады.
- Егер $n \to \infty$ болғанда дербес қосындыларының S ақырлы шегі табылса, сандық қатар *жинақты* болады.
- Бұл шек жинақталатын қатардың *қосындысы* деп аталады. Егер дербес қосындылар тізбегінің шегі болмаса немесе ∞ тең болса, онда қатар *жинақсыз* деп аталады.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

Дербес қосынды		Мәні	Дербес қосынды мәнін түрлендіру
Бірінші:	$s_1=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1-\frac{1}{2}$
Екінші:	$s_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$1-\frac{1}{4}$
Үшінші:	$s_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	$1-\frac{1}{8}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-ші	$s_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$	$\frac{2^n-1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^n}$

бұнда белгілі бір заңдылық бар, яғни дербес қосындылар n-ші мүшесі

$$s_n=1-\frac{1}{2^n}$$

болатын тізбек құрайды.

Енді осы дербес қосындылар тізбегінің шегін табамыз:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

Сонымен $$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

шексіз қатардың қосындысы 1-ге тең

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\,(n+1)} + \ldots$$

Мысал 1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

қатары берілген. Қатардың жинақтылығын анықтап, қосындысын табыңыз.

Шешуі: Берілген қатардың n -ші дербес қосындысын келесі түрде жазамыз және оны түрлендіреміз:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

$$S_1=\frac{1}{1\bullet 2},\quad S_2=\frac{1}{1\bullet 2}+\frac{1}{2\bullet 3},\qquad S_1=1-\frac{1}{2},\quad S_2=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3},$$

$$S_3=\frac{1}{1\bullet 2}+\frac{1}{2\bullet 3}+\frac{1}{3\bullet 4},\ldots\qquad S_3=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{4},\ldots$$

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}.$$

$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$ болғандықтан, онда, осы қатар жинақталған және оның қосындысы $S=1$.

$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$ түріндегі қатар еселігі q болатын геометриялық прогрессия мүшелерінің қосындысы болып саналады.

$|q| < 1$ болғанда, қатар *жинақталады* және оның қосындысы $S = \frac{a}{1-q}$ болатыны белгілі. Егер $|q| \geq 1$, онда қатар *жинақсыз*.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ түріндегі қатар ***гармониялық қатар*** деп аталады. Гармониялық қатар жинақсыз.

Қатардың жинақтылығын анықтап, қосындысын табыңыз:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{2}{3}\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots$$

Бұл қатар геометриялық прогрессия мүшелерінің қосындысы болып табылады:

$$a=\frac{2}{3} \qquad q=\frac{1}{2}$$

$$|q|=\left|\frac{1}{2}\right|<1$$

Яғни жинақталады

$$S=\frac{a}{1-q}$$

$$S=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}:\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$$

Мысалы:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **қатары жинақталмайды**. *Яғни*, шексіз қосынды шексіздікке тең дегенді білдіреді: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots = \infty$, немесе келесі мысалдағыдай қосындысы *табылмайды*

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ (бұл теріс мүшелері бар қатар мысалы). Жинақсыз қатардың жақсы мысалы $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) = 3 + 5 + 7 + \ldots$. Бұл мысалда көріп тұрғанымыздай қатардың әрбір мүшесі алдыңғы мүшесінен үлкен, сондықтан $3 + 5 + 7 + \ldots = \infty$, қатар жинақсыз. Келесі тривиал мысал: $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \ldots$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **қатары жинақталады, яғни, шексіз қосынды *ақырлы*** S *санына* тең : $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots = S$. Мысал: $\sum_{n=1}^{\infty} 0^n = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$ – бұл қатар жинақталады және оның қосындысы нолге тең.

1. Сандық қатардың алғашқы бес мүшесін жазыңыз:

$$u_n = \frac{4n-3}{n^2+1}$$

Жауабы: $u_n = \frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{10} + \frac{13}{17} + \frac{17}{26} + \dots$.

2. Сандық қатардың жалпы мүшесін табыңыз:

$$u_n = 1 + \frac{4}{3} + \frac{7}{9} + \frac{10}{27} + \frac{13}{81} + \dots \quad .$$

Жауабы: $u_n = \frac{3n-2}{3^{n-1}}$

Қатардың жинақтылығын анықтау керек:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{2n}$$

$n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{2n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{2n}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n^2}}{\frac{2}{n}} = \left(\frac{1+0}{0}\right) = \infty.$$

Қатар жинақталмайды