12.5.1.3

$\sum_{r=1}^{n} r^0, \sum_{r=1}^{n} r, \sum_{r=1}^{n} r^2, \sum_{r=1}^{n} r^3$ дербес қосынды формулаларын қорытып шығару және қолдану;

Дербес қосындылар формуласын енгізіңіз

$\sum_{r=1}^{n} r^0, \sum_{r=1}^{n} r, \sum_{r=1}^{n} r^2, \sum_{r=1}^{n} r^3$, әрқайсысын жеке-жеке қарастырып:

1) $\sum_{r=1}^{n} r^0 = \sum_{r=1}^{n} 1 = n$

Келесі формуланы оқушыларға өздігінен қорытып шығаруды ұсыныңыз.

Бұл формуланы қорытып шығару үшін келесі қосындыны жазса жеткілікті:

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = n$$

2) $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2} n(n+1)$

Оқушыларғы жұппен қосындыларды есептеуді ұсыныңыз:

1) 1 + 2 + 3 + ... + 10 = **55**

2) 1 + 2 + 3 + ... + 99 = **4950**

3) 11 + 12 + 13 + ... + 20 = **210 – 55 = 155**

4) 100 + 101 + 102 + ... + 200 = **20100 – 4950 = 15150**

3,4 мысалдардың шешу жолдарына назар аударыңыз.

$$\sum_{r=11}^{20} r = \sum_{r=1}^{20} r - \sum_{r=1}^{10} r =$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot 20 \cdot (20+1) - \tfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10+1) = 155.$$

Оқушылар жұппен екінші формуланы арифметикалық прогрессияның қосындысы арқылы қорытып шығара алады.

3) $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

Бұл формуланы қорытып шығару үшін келесі тепе-теңдіктерді пайдаланыңыз:

$$n^3 = \sum_{r=1}^{n} (r^3 - (r-1)^3)$$

$$n^3 = \sum_{r=1}^{n} (3r^2 - 3r + 1)$$

$$n^3 = 3\sum_{r=1}^{n} r^2 - 3\sum_{r=1}^{n} r + \sum_{r=1}^{n} 1$$

$$n^3 = 3\sum_{r=1}^{n} r^2 - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$3\sum_{r=1}^{n} r^2 = n^3 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}\right)$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Оқушыларға

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 52^2$ есептеуді ұсыныңыз.

$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ формуладан

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 52^2 = \frac{1}{6} \times 52 \times 53 \times 105 = 48230$ аламыз.

Енді оқушыларға

$5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2$ есептеуді ұсыныңыз.

Оқушылар келесі есептеу әдісін бекітулері керек -

$$\sum_{i=5}^{10} r^2 = \sum_{i=1}^{10} r^2 - \sum_{i=1}^{4} r^2 = 385 - 30 = 355$$

$$4)\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

Осы формуланы қорытып шығару үшін келесі тепе-теңдіктерді пайдаланыңыз:

$$n^4 = \sum_{r=1}^{n}(r^4 - (r-1)^4)$$

$$n^4 = \sum_{r=1}^{n}(r^4 - r^4 + 4r^3 - 6r^2 + 4r - 1)$$

$$n^4 = 4\sum_{r=1}^{n} r^3 - 6\sum_{r=1}^{n} r^2 + 4\sum_{r=1}^{n} r - \sum_{r=1}^{n} 1$$

1-3 формулаларды пайдаланып,

$$n^4 = 4\sum_{r=1}^{n} r^3 - n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) - n$$

$$4\sum_{r=1}^{n} r^3 = n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n$$

$$4\sum_{r=1}^{n} r^3 = n^2(n+1)^2$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

аламыз.

Оқушыларға

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3$ есептеуді ұсыныңыз.

4-ші формулаға сәйкес

$$\sum_{i=1}^{10} i^3 = \frac{1}{4} \times 10^2 \times 11^2 = 3025$$

аламыз.

Енді оқушыларға

$$100^3 + 101^3 + \cdots + 200^3$$

есептеуді ұсыныңыз.

Осы тапсырманы орындау кезінде оқушылар алдыңғы мысалда келтірілген әдісті пайдалануы керек

$$100^3 + 101^3 + \cdots + 200^3 = \sum_{i=1}^{200} i^3 - \sum_{i=1}^{99} i^3 = 379{,}507{,}500$$

Осы әдісті келесі тапсырманы орындау арқылы бекітуге болады –

Дәлелдеңіз:

$$\sum_{r=n}^{3n} r = 2n(2n+1).$$

Дәлелдеуі:

$$\sum_{r=n}^{3n} r = \frac{1}{2}(3n)(3n+1) - \frac{1}{2}(n-1)(n-1+1)$$

$$= \frac{3}{2}n(3n+1) - \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$= \frac{1}{2}n(9n+3-n+1)$$

$$= \frac{1}{2}n(8n+4)$$

$$= 2n(2n+1)$$