Қатарларды жуықтап есептеулерде қолдану

Оқу мақсаты:

- 12.5.3.1 анықталған интегралды есептеу үшін функцияларды Маклорен және Тейлор қатарларына жіктеуді қолданады;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

түріндегі қатар x айнымалысының дәрежесі бойынша орналасқан **дәрежелік қатар** деп аталады, мұндағы $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ - тұрақты сандар.

Дәрежелік қатар келесі қасиеттерге ие:

1. Жинақталу интервалында дәрежелік қатардың қосындысы үзіліссіз болады.
2. Дәрежелік қатарды жинақталу интервалында мүшелеп шексіз дифференциалдаса болады.
3. Дәрежелік қатарды жинақталу интервалындағы кез-келген аралықта мүшелеп шексіз интегралдаса болады.

Қарапайым функциялармен өрнектелмейтін анықталған интегралдарды қатарлар арқылы есептеуге болады.

Мысал

$$\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$$

анықталған интегралын $\delta = 10^{-3}$ дейінгі дәлдікпен есептеңіз.

Шешуі:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$\sin x$ функциясын Маклерон қатарына жіктелуін пайдаланамыз

Шешуі (жалғасы):

x –ті x^2-қа ауыстырып

$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \cdots$ қатарды аламыз.

Оны интегралдап

$$\int_0^1 \sin(x^2)dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \cdots\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)(2n-1)!} + \cdots\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$=\frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(4n-1)(2n-1)!} + \cdots \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} = 0{,}3333 - 0{,}0381 = 0{,}295$$

алынған қатардың үшінші мүшесі $\delta = 10^{-3}$-дан кіші болғандықтан интеграл $0{,}295$ тең болады.

2-мысал

Функцияны қатарға жіктеуді пайдаланып, *sin 0,8* мәнін 0,001 дәлдікке дейін есептеңіз

Шешуі

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$\sin x$ функциясын Маклерон қатарына жіктелуін пайдаланамыз

$$\sin 0{,}8 = 0{,}8 - \frac{(0{,}8)^3}{6} + \frac{(0{,}8)^5}{120} - \frac{(0{,}8)^7}{7!} + \frac{(0{,}8)^9}{9!} - \ldots \approx$$

$$\approx 0{,}8 - 0{,}085333 + 0{,}002731 - 0{,}000042 + 0{,}0000004 - \ldots \approx (*)$$

Сколько членов ряда следует просуммировать для достижения требуемой точности? Для сходящихся **знакочередующихся рядов справедлив следующий критерий**: члены следует суммировать до тех пор, пока они **по модулю больше** заданной точности. Первый же меньший вместе со всем «хвостом» подлежит утилизации. В данном примере таковым является 4-й член: $|-0{,}000042| < 0{,}001$, поэтому:

$$(*) \approx 0{,}8 - 0{,}085333 + 0{,}002731 = 0{,}717398 \approx 0{,}717$$

№3 $\ln 1{,}3$ мәнін 0,1 дәлдікке дейін есептеңіз

Шешуі:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,\ x \in (-1{,}1).$$

$x = 0{,}3; \quad -1 < 0{,}3 \leq 1$

$$\ln(1+0{,}3) = 0{,}3 - \frac{0{,}3^2}{2} + \frac{0{,}3^3}{3} = 0{,}264.$$

$$\ln(1{,}3) = 0{,}3 - \frac{0{,}3^2}{2} + \frac{0{,}3^3}{3} - \frac{0{,}3^4}{4} + \frac{0{,}3^5}{5} = 0{,}262461.$$

№4

$\sqrt[4]{15}$ мәнін 0,0001 дәлдікке дейін есептеңіз

Шешуі:

$$\sqrt[4]{15} = \sqrt[4]{2^4 - \frac{1}{16}} = 2\sqrt[4]{1 - \frac{1}{16}}.$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + \ldots, |x| < 1, a \in R / N$$

$$x = -\frac{1}{16}; a = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt[4]{1 - \frac{1}{16}} \approx 1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4} - 1\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^2 \approx 0,9840.$$

$$\sqrt[4]{15} = 2\sqrt[4]{1 - \frac{1}{16}} \approx 2 \cdot 0,9840 = 1,968.$$

Жеке жұмыс

Интеграл астындағы функцияны x дәрежесі бойынша қатарға жіктеп, 0,001 дәлдікпен анықталған интегралды жуықтап есептеңіз.

1. $\int_0^{0.5} \sqrt{1+x^3}\,dx$

2. $\int_0^{0.8} \frac{1-\cos x}{x}\,dx$

3. $\int_0^{0.4} \sqrt[4]{(1+2x^2)^3}\,dx$

4. $\int_0^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx$

5. $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$

6. $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\,dx$

Жауаптары:

1) 0,508; 2) 0,156; 3) 0,432; 4) 2,835; 5) 0,764; 6) 0,245.

Сабақты қорытындылау

Бүгінгі сабақта маған

- *барлығы түсініксіз болды;*
- *қайталау қажет тақырыптар бар;*
- *барлығы түсінікті болды*