Функцияларды Тейлор қатарына жіктеу

Функциялардың стандартты Маклерон қатарына жіктелуі:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty \tag{9}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty \tag{10}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty \tag{11}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots, \qquad -1 < x \le 1 \tag{12}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots, \qquad -1 \le x \le 1 \tag{13}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \qquad -1 < x < 1 \tag{14}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \qquad -1 < x < 1 \tag{15}$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots \tag{16}$$

Оқу мақсаты

12.5.1.8

- функцияларды Тейлор қатарына жіктейді;

Бағалау критерийлері

- Тейлор (Маклорен) қатарының анықтамасын біледі;
- функцияларды Тейлор қатарына жіктеуді біледі;

Анықтама:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

түріндегі қатар $f(x)$ *функциясының* X_0 *нүктесіндегі* *Тейлор қатары* *деп аталады.*

$x_0 = 0$ болғандағы Тейлор қатарын жазыңыз. Бұл қатар қалай аталады?

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

Дербес жағдайда $x_0=0$ болғанда,

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots R$$

түріндегі қатар функциясының Маклорен қатары деп аталады.

Тейлор қатарының жинақтылық шарты

$f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде жуықталуы ретінде алынған Тейлор қатары үшін төмендегі шарт орындалғанда қатардың жинақталуы қажетті және жеткілікті:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

мұнда $c - (x_0 ; x)$ интервалындағы қандай да бір сан

1-мысал

$f(x) = \frac{1}{x}$ функцияны $x_0 = -1$ нүктенің аймағында Тейлор қатарына жіктеңіз.

Шешуі: функцияның туындыларын табамыз:

$f'(x) = -x^{-2}$

$f''(x) = 1 \cdot 2x^{-3}$

$f'''(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3x^{-4}$

….

$f^n(x) = (-1)^{n+2} n!\, x^{-n-1}$

$x = -1$ нүктеде функцияның мәнін және функцияның туындылардың мәндерін табамыз.

$f(-1) = -1$

$f'(-1) = -1$

$f''(-1) = -2!$

$f'''(-1) = -3!$

$f^n(-1) = -n!$

Функцияның Тейлор қатарына жіктелуін жазамыз

$$f(x) = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - (x+1)^3 - \cdots - (x+1)^n + \cdots$$

Пример 2

Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ в точке $x = 1$.

Решение.

Вычислим производные:

$$f'(x) = 6x - 6,\ \ f''(x) = 6,\ \ f'''(x) = 0.$$

Видно, что $f^{(n)}(x) = 0$ для всех $n \geq 3$. Для $x = 1$ получаем значения:

$$f(1) = 2,\ \ f'(1) = 0,\ \ f''(1) = 6.$$

Следовательно, разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(1)\frac{(x-1)^n}{n!} = 2 + \frac{6(x-1)^2}{2!} = 2 + 3(x-1)^2.$$

№3

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$, функциясын $x_0 = 1$ *нүктесінде Тейлор қатарына жіктеңіз.*

$$f(a) = f(1) = 1 + 4 - 3 + 2 = 4$$

$$f'(x) = (x^3 + 4x^2 - 3x + 2)' = 3x^2 + 8x - 3$$
$$f'(a) = f'(1) = 3 + 8 - 3 = 8$$

$$f''(x) = (3x^2 + 8x - 3)' = 6x + 8$$
$$f''(a) = f''(1) = 6 + 8 = 14$$

$$f'''(x) = (6x + 8)' = 6 = const$$
$$f'''(a) = f'''(1) = 6$$

$$f^{(4)}(x) = (6)' = 0,$$

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = 4 + \frac{8}{1!}(x-1) + \frac{14}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 + 0 + 0 + 0 + \ldots =$$
$$= 4 + 8(x-1) + 7(x-1)^2 + (x-1)^3$$

№4

Найти разложение в ряд Тейлора кубической функции x^3 в точке $x = 3$.

Решение.

Обозначим $f(x) = x^3$. Тогда

$$f'(x) = \left(x^3\right)' = 3x^2, \;\; f''(x) = \left(3x^2\right)' = 6x, \;\; f'''(x) = (6x)' = 6, \;\; f^{IV}(x) = 0,$$

и далее $f^{(n)}(x) = 0$ для всех $x \geq 4$.

В точке $x = 2$, соответственно, получаем

$$f(2) = 8, \;\; f'(2) = 12, \;\; f''(2) = 12, \;\; f'''(2) = 6.$$

Таким образом, разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(2) \frac{(x-2)^n}{n!} = 8 + 12(x-2) + \frac{12(x-2)^2}{2!} + \frac{6(x-2)^3}{3!}$$

$$= 8 + 12(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

№5 Разложить функцию $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ в ряд Тейлора по степеням $(x+1)$. Найти область сходимости полученного ряда.

В данном случае: $x_0=-1$

$$f(x_0)=f(-1)=\frac{1}{-1+3}=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x+3}\right)'=-\frac{1}{(x+3)^2}$$

$$f'(x_0)=f'(-1)=-\frac{1}{2^2}$$

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{(x+3)^2}\right)'=\frac{1\cdot 2}{(x+3)^3}$$

$$f''(x_0)=f''(-1)=\frac{1\cdot 2}{2^3}$$

$$f'''(x)=\left(\frac{1\cdot 2}{(x+3)^3}\right)'=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+3)^4}$$

$$f'''(x_0)=f'''(-1)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{2^4}$$

А теперь проанализируем найденные производные:

$$f'(x)=-\frac{1}{(x+3)^2},\ f''(x)=\frac{1\cdot 2}{(x+3)^3},\ f'''(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+3)^4}.$$

$$f^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(-1)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{2^{n+1}}$$

$$f(x)=\frac{1}{x+3}=\frac{1}{2}+\frac{-\frac{1}{2^2}}{1!}(x+1)+\frac{\frac{1\cdot 2}{2^3}}{2!}(x+1)^2+\frac{-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{2^4}}{3!}(x+1)^3+\ldots+\frac{\frac{(-1)^n\cdot n!}{2^{n+1}}}{n!}(x+1)^n+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}(x+1)+\frac{1}{2^3}(x+1)^2-\frac{1}{2^4}(x+1)^3+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x+1)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(x+1)^n}{2^{n+1}}$$

Жеке жұмыс

1) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$, функциясын $x_0 = 1$ *нүктесінде Тейлор қатарына жіктеңіз.*

2) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, функциясын $x_0 = 0$ нүктесінде жіктеңіз

3) $y = \ln(1+2x)$ функциясын дәрежесі $(x-3)$ бойынша Тейлор қатарына жіктеңіз.

Сабақты қорытындылау

Бүгінгі сабақта маған

- *барлығы түсініксіз болды;*
- *қайталау қажет тақырыптар бар;*
- *барлығы түсінікті болды.*