ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4

Разложение функций в ряд Тейлора

Рядом Тейлора называется ряд

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0=0$, то получим разложение функции по степеням x в так называемый *ряд Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Таблица разложений в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad x\in(-1;1),$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad x\in(-1,1),$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in R,$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in R,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in R,$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1;1],$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad x\in[-1,1),$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n,\quad x\in(-1;1)$$

Примеры решения задач

1. Разложить в ряд по степеням *x* функции

а) $f(x)=\sin^2 x$; б) $f(x)=2x\cos^2\frac{x}{2}-x$.

Решение.

а) Используем равенство $f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, в котором заменим $\cos 2x$ его разложением в степенной ряд (в табличной формуле заменяем *x* на 2 *x*):

$$\cos 2x = 1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\cdots.$$

Тогда

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-1+\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(2x)^4}{4!}+\frac{(2x)^6}{6!}-\cdots)=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\cdots,\ x\in R,$$

или в краткой форме $\sin^2 x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$, $x\in R$.

б) Сначала преобразуем функцию:

$$f(x)=2x\cos^2\frac{x}{2}-x=x(2\cos^2\frac{x}{2}-1)=x\cos x$$

Теперь, используя известное разложение для функции $\cos x$, найдем искомое разложение

$$f(x)=x\cos x=x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+..\right)=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n}\frac{x^{2n+1}}{(2n)!},$$

где $x\in R$.

2. Разложить в ряд по степеням *x* функцию $f(x)=\ln(4-x)$.

Решение. Так как

$$f(x)=\ln(4-x)=\ln 4+\ln\left[1+\left(-\frac{x}{4}\right)\right],$$

то, воспользовавшись формулой разложения функции $\ln(1+x)$, в которой заменим *x* на $\left(-\frac{x}{4}\right)$, получим: $\ln(4-x)=\ln 4+\left(-\frac{x}{4}\right)+\frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^2}{2}+\frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^3}{3}-\ldots,$

или

$$\ln\left(4-x\right)=\ln 4-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4^2}\cdot\frac{x^2}{2}-\ldots-\frac{1}{4^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}-\ldots,$$

если $-1<-\frac{x}{4}\le 1,$ т.е. $-4\le x<4.$ В краткой форме можно записать

$$\ln(4-x)=\ln 4-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)},\ -4\le x<4.$$

3. Разложить в ряд по степеням $x-1$ функцию $f(x)=\ln x$.

Решение. Так как $f(x)=\ln x=\ln(1+(x-1))$ то, воспользовавшись формулой разложения функции $\ln(1+x)$, в которой заменим *x* на $x-1$ получим:

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\cdots,\quad x\in(0,2],$$

или в краткой форме $\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n},\ x\in(0,2]$.

4. Разложить в ряд по степеням *x* функции

а) $f(x)=\frac{3}{2-x-x^2}$; б) $f(x)=\frac{x+2}{x^2-5x+6}$.

Решение.

а) Разложим данную функцию методом неопределенных коэффициентов на элементарные дроби:

$$f(x)=\frac{3}{2-x-x^2}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x+2}.$$

Используя табличные разложения, получим

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ x\in(-1,1),\qquad \frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}},\ x\in(-2,2).$$

Во второй дроби в табличной формуле для функции $\frac{1}{1+x}$ было заменено *x* на $\frac{x}{2}$.

Отсюда,

$$f(x)=\frac{3}{2-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n .$$

Областью сходимости данного ряда является пересечение интервалов $x\in(-1{,}1)\cap(-2{,}2)=(-1{,}1)$

б) Разложим дробь на элементарные дроби методом неопределенных коэффициентов и преобразуем:

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2-5x+6}=\frac{-4}{x-2}+\frac{5}{x-3}=2\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}.$$

Используя табличное разложение для функции $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$, в котором x заменим на $\frac{x}{2}$ для первой дроби и x заменим на $\frac{x}{3}$ для второй дроби, получим

$$f(x)=2\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=2\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+...+\frac{x^{n-1}}{2^{n-1}}+...\right)-\frac{5}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}+...+\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}}+...\right).$$

Здесь первый ряд сходится при |x|<2, а второй ряд сходится при |x|<3, отсюда оба ряда сходятся при |x|<2. В краткой форме полученный ряд можно записать в виде

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{5}{3^n}\right)x^{n-1},\ x\in(-2{,}2).$$

5. Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+7}$ по степеням x+2.

Решение. Преобразовав данную функцию и применив табличное разложение

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,\ x\in(-1;1),$$

в котором x заменяется на $-\frac{(x+2)^2}{3}$, получим

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+7}=\frac{1}{(x+2)^2+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{(x+2)^2}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^{2n}}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}.$$

Областью сходимости данного ряда является интервал $\frac{(x+2)^2}{3}<1$. Решив это неравенство, найдем $x\in(-\sqrt{3}-2,\ \sqrt{3}-2)$.

6. Разложить функцию $f(x)=3^x$ по степеням $x-1$.

Решение. Преобразуем функцию в виде

$$f(x)=3^x=3\cdot 3^{x-1}=3(e^{\ln 3})^{x-1}=3e^{\ln 3(x-1)}.$$

Используем табличную формулу $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$, в которой x заменяем на $\ln 3(x-1)$, найдем

$$3e^{\ln 3(x-1)}=3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 3)^n}{n!}(x-1)^n.$$

Данное разложение имеет место при любом x.

7. Разложить функцию $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$ по степеням $x+1$.

Решение. Представим данную функцию в форме

$$f(x)=e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{-1+x+1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{x+1}{2}}.$$

Используем вновь табличную формулу $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$, в которой x заменяем на $\frac{x+1}{2}$, найдем

$$f(x)=e^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{x+1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n n!},\ x\in R.$$

8. Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ по степеням $x-4$.

Решение. Перепишем данную функцию в виде

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{4+x-4}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x-4}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Воспользуемся табличной формулой

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\ x\in(-1;1),$$

в которой x заменяется на $\frac{x-4}{4}$, а $\alpha=-\frac{1}{2}$. Отсюда,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\frac{(x-4)^n}{4^n}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{3n+1}\cdot n!}(x-4)^n.$$

Областью сходимости данного ряда является интервал $\frac{|x-4|}{4}<1$ или $x\in(0,8)$.