Функцияларды дәрежелік қатарға жіктеу

Оқу мақсаты:

12.5.1.7 $(1+x)^{\alpha}$, e^{x}, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ функцияларын Маклорен қатарына жіктейді;

Анықтама

$f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде шексіз дифференциалданатын болсын.

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

түріндегі қатар **Маклорен қатары** деп аталады.

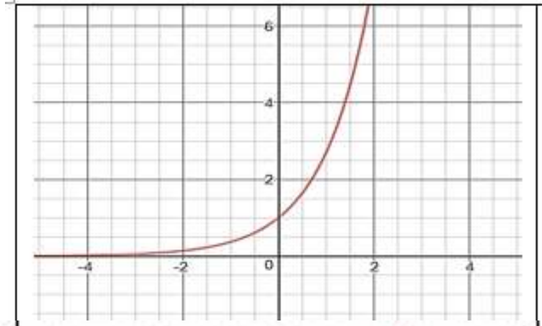
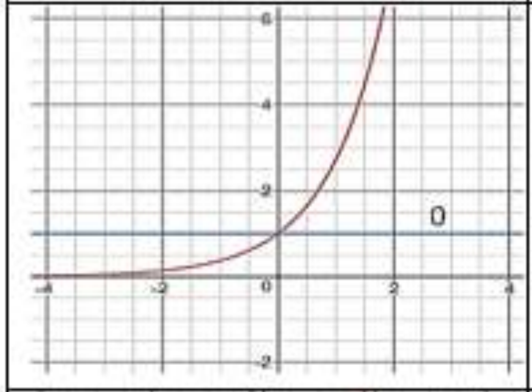
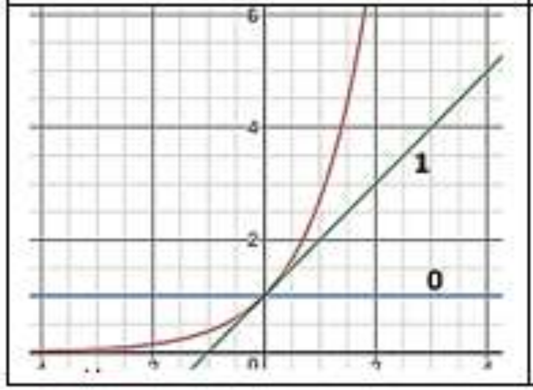
Функцияны Маклорен қатарына жіктеу алгоритмі:

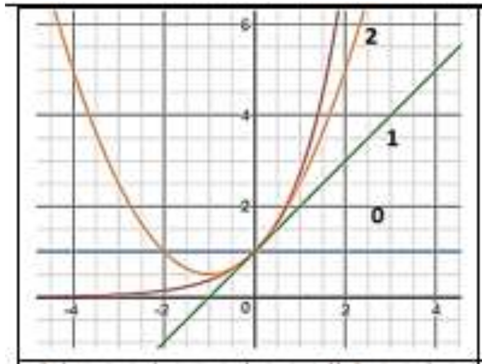
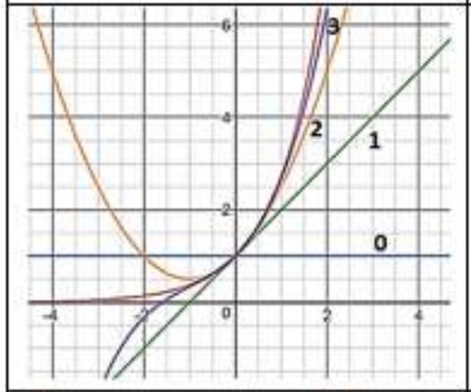
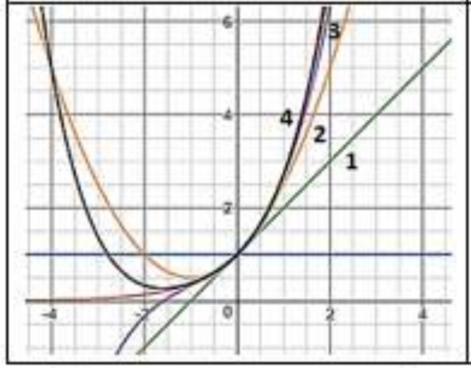
1) $x = 0$ болғанда осы функцияның мәнін есептеңіз;
2) $x = 0$ болғанда оның туындылардың мәндерін есептеңіз;
3) оларды Маклорен қатарына қойыңыз.

1-мысал

Графиктердің өзара орналасуы бойынша не байқадыңыз?

$y = e^x$ функциясын Маклорен қатарына жіктеңіз.

	$y = e^x$
	$e^x = 1 + \cdots$
	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots$

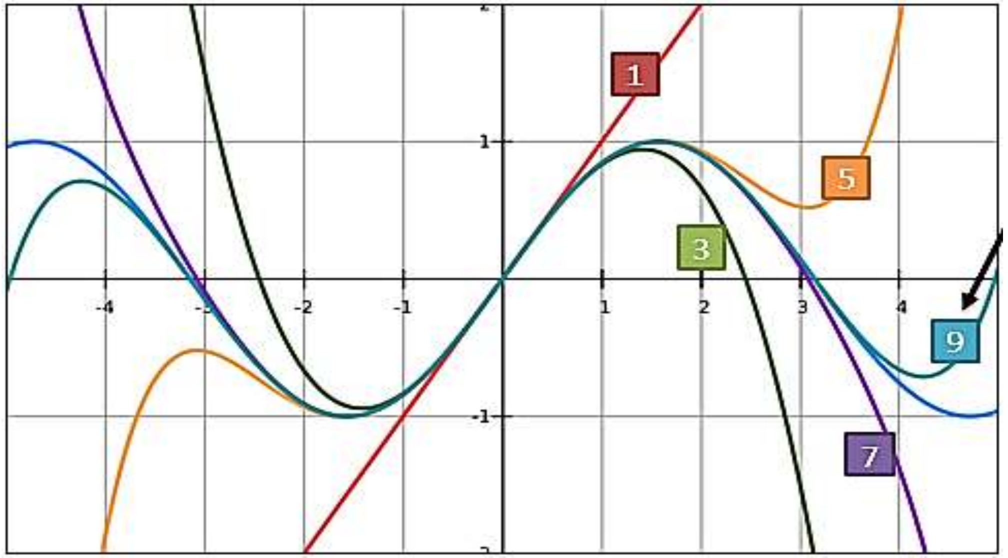
	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$
	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots$

2-мысал

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

$y=\sin x$ функциясын Маклорен қатарына жіктеуін көрсетіңіз.

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$



3-мысал

$$\mathbf{f(0)} + \frac{\boldsymbol{f'(0)}}{\mathbf{1!}}\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{f''(0)}}{\mathbf{2!}}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \cdots + \frac{\boldsymbol{f^{(n)}(0)}}{\boldsymbol{n}!}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} + \cdots$$

$y = \cos x$ функциясын Маклорен қатарына жіктеуін көрсетіңіз.

Жауабы: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

4-мысал

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$$

$\ln(1+x)$ функциясын Маклорен қатарына жіктеуін көрсетіңіз.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+\dots$$

Пример 5

$$\mathbf{f(0)} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Найти разложение в ряд Маклорена функции $(1+x)^{\mu}$.

Решение.

Пусть $f(x) = (1+x)^{\mu}$, где μ – действительное число, и $x \neq -1$. Производные будут равны

$$f'(x) = \mu(1+x)^{\mu-1},$$

$$f''(x) = \mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2},$$

$$f'''(x) = \mu(\mu-1)(\mu-2)(1+x)^{\mu-3},$$

$$f^{(n)}(x) = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}.$$

При $x = 0$, соответственно, получаем

$$f(0) = 1,\ \ f'(0) = \mu,\ \ f''(0) = \mu(\mu-1),\ldots\ \ f^{(n)}(0) = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1).$$

Следовательно, разложение в ряд записывается в виде

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^2 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Полученное выражение называется *биномиальным рядом*.

Маклорен стандарт жіктелуі

жинақталу облысы

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

Жеке жұмыс

$f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x}$ функциясын x дәрежесі бойынша қатарға жіктеңіз.

Шешімі:

$\sin\alpha$, $\alpha=2x$ стандарт жіктелуін қолданамыз.

$$f(x)=\frac{\sin 2x}{x}=2-\frac{2^3x^2}{3!}+\frac{2^5x^4}{5!}-\frac{2^7x^6}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot 2^{2n-1}\cdot x^{2n-2}+\ldots$$

Жеке жұмыс

2. $f(x)=\ln(10+x)$ функциясын х дәрежесі бойынша қатарға жіктеңіз.

Шешуі:

$\ln(1+\alpha)$ стандарт жіктелуін қолданамыз. $\ln(ab)=\ln a+\ln b$, $\alpha=\frac{x}{10}$

екенін ескереміз.

$$\ln(10+x)=\ln 10\cdot\left(1+\frac{x}{10}\right)=\ln 10+\ln\left(1+\frac{x}{10}\right)$$

$$f(x)=\ln(10+x)=\ln 10+\frac{x}{10}-\frac{x^2}{2\cdot 10^2}+\frac{x^3}{3\cdot 10^3}-\frac{x^4}{4\cdot 10^4}+\frac{x^5}{5\cdot 10^5}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n\cdot 10^n}$$

№3

Найти ряд Маклорена для функции $\cos^2 x$.

Решение.

Воспользуемся тригонометрическим равенством $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Поскольку ряд Маклорена для $\cos x$ имеет вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, то можно записать

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}.$$

Отсюда следует:

$$1 + \cos 2x = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}.$$

№4

Найти разложение в ряд Маклорена функции e^{kx}, k – действительное число.

Решение.

Вычислим производные:

$$f'(x) = \left(e^{kx}\right)' = ke^{kx},\ \ f''(x) = \left(ke^{kx}\right)' = k^2e^{kx}, \ldots\ \ f^{(n)}(x) = k^ne^{kx}.$$

Тогда в точке $x = 0$ получаем

$$f(0) = e^0 = 1,\ \ f'(0) = ke^0 = k,\ \ f''(0) = k^2e^0 = k^2, \ldots\ \ f^{(n)}(0) = k^ne^0 = k^n.$$

Следовательно, разложение данной функции в ряд Маклорена выражается формулой

$$e^{kx} = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^nx^n}{n!}.$$

№5

Найти разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \sqrt{1+x}$.

Решение.

Используя формулу биномиального ряда, найденную в предыдущем примере, и подставляя $\mu = \dfrac{1}{2}$, получаем

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1 \cdot x^2}{2^2 2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^3}{2^3 3!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^3}{2^4 4!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-3)\, x^n}{2^n n!}.$$

Ограничиваясь первыми 3-мя членами, разложение можно записать в виде

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

$$\operatorname{arctg} x : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

(1) $\dfrac{x^2}{(1+x)^2}$;

(3) $(1+x)e^{-x}$; **(4)** $(1+x^2)\operatorname{arctg} x$;

(5) $\dfrac{1}{x^2-2x-3}$; **(6)** $\dfrac{5-2x}{x^2-5x+6}$;

(7) $\cos^2 x$; **(8)** $\sin^3 x$.

18.6. (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{n+2}$, $R=1$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{3n}$, $R=1$; (3) $1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}x^n$, $R=\infty$; (4) $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$, $R=1$; (5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}((-1)^{n+1}-3^{-(n+1)})x^n$, $R=1$; (6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^{-(n+1)}+3^{-(n+1)})x^n$, $R=2$; (7) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $R=\infty$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3(3^{2n}-1)}{4(2n+1)!}x^{2n+1}$, $R=\infty$.

18.9. Задачи. 1. Разложить в ряд Маклорена следующие фун-
ции и найти радиусы сходимости рядов:

(1) $\operatorname{arctg}\dfrac{2x-3}{x+6}$; **(2)** $\operatorname{arctg}\dfrac{2+x^2}{2-x^2}$;

(3) $\operatorname{arctg}(x+\sqrt{1+x^2})$; **(4)** $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$;

(5) $x\ln(x+\sqrt{x^2+2})$; **(6)** $\ln(x^3+\sqrt{9+x^6})$;

18.9. 1. (1) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$, $R=3$; (2) $\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)2^{2n+1}}$, $R=\sqrt{2}$; (3) $\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2(2n-1)}x^{2n-1}$, $R=1$; (4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, $R=1$; (5) $x\ln\sqrt{2}+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1/2}}\cdot\frac{(2n03)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n-1}$, $R=\sqrt{2}$; (6) $\ln 3+\frac{x^3}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!3^{2n+1}(2n+1)}x^{6n+3}$, $R=\sqrt[3]{3}$.

4. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x|<1$. **5.** $\frac{1+x}{(1-x)^3}$.

6. (1) x, $x>0$; (2) $\frac{x^2}{(1-x)^2}$, $|x|<1$.

Сабақты қорытындылау

Бүгінгі сабақта маған

- *барлығы түсініксіз болды;*
- *қайталау қажет тақырыптар бар;*
- *барлығы түсінікті болды.*