



# АЙНАЛУ ДЕНЕЛЕРІНІҢ КӨЛЕМДЕРІ

12.3.3.6

көпжақтардың (пирамида, қиық пирамида, призма және олардың түрлері) көлемін табады;

Объем  $V_{yn}$  усеченной пирамиды с основаниями  $Q$  и  $q$  и высотой  $H$  равен сумме объемов трех пирамид с той же высотой  $H$  и с площадями оснований  $Q$ ,  $q$  и  $\sqrt{Qq}$ :  
 $V_{yn} = \frac{1}{3}H(Q + q + \sqrt{Qq})$ .

Доказательство:

Продолжения боковых ребер усеченной пирамиды пересекутся в точке  $S$ . Объем усеченной пирамиды равен разности объемов пирамид  $SABCDE$  (высота ее  $H + x$  и площадь основания  $Q$ ) и  $SA_1B_1C_1D_1E_1$  (высота ее  $x$  и площадь основания  $Q$ ):

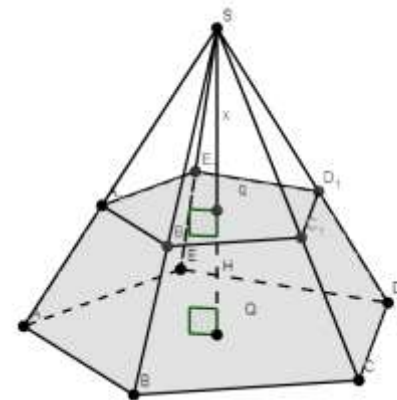
$$V_{yn} = \frac{1}{3}[(H + x)Q - qx] = \frac{1}{3}[QH + (Q - q)x].$$

Выразим  $x$  через известные величины  $H$ ,  $Q$  и  $q$ . Имеем:

$$\frac{Q}{q} = \frac{(H+x)^2}{x^2}; \quad \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{q}} = \frac{H+x}{x}, \quad x = \frac{H\sqrt{q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}.$$

Подставим эту дробь вместо  $x$ , заменим  $Q - q$  через  $(\sqrt{Q} - \sqrt{q})(\sqrt{Q} + \sqrt{q})$  и сократим дробь:

$$V_{yn} = \frac{1}{3}\left[QH + \frac{(Q-q)H\sqrt{q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}\right] = \frac{1}{3}\left[QH + \frac{(\sqrt{Q}-\sqrt{q})(\sqrt{Q}+\sqrt{q})H\sqrt{q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}\right] = \frac{1}{3}\left[QH + (\sqrt{Q} + \sqrt{q})H\sqrt{q}\right] = \frac{1}{3}(QH + H\sqrt{qQ} + qH) = \frac{1}{3}H(Q + q + \sqrt{Qq}).$$



## Теорема 1.

Объем  $V_{y.\kappa}$  усеченного конуса с основаниями, равными  $\pi R^2$  и  $\pi r^2$ , и высотой  $H$ , равен сумме объемов трех конусов с той же высотой  $H$  и с площадями оснований  $\pi R^2$ ,  $\pi r^2$  и  $\pi Rr$ :

$$V_{y.\kappa} = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr).$$

Доказательство:

Объем вписанной в усеченный конус правильной усеченной пирамиды

$V_n = \frac{1}{3}H(Q_n + q_n + \sqrt{Q_n q_n})$ , где  $Q_n$  и  $q_n$  — площади оснований усеченной пирамиды, вписанных в основания усеченного конуса и  $H$  — общая высота этих тел, остающаяся неизменной при  $n \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{3}H(Q_n + q_n + \sqrt{Q_n q_n}) \right] = \frac{1}{3}H \lim_{n \rightarrow \infty} (Q_n + q_n + \sqrt{Q_n q_n}).$$

При переходе к пределу получим

$$Q_n \rightarrow \pi R^2, \quad q_n \rightarrow \pi r^2, \quad \sqrt{Q_n q_n} \rightarrow \pi Rr.$$

Но по определению  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$  равен объему ( $V_{y.\kappa}$ ), усеченного конуса.

$$V_{y.\kappa} = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr).$$

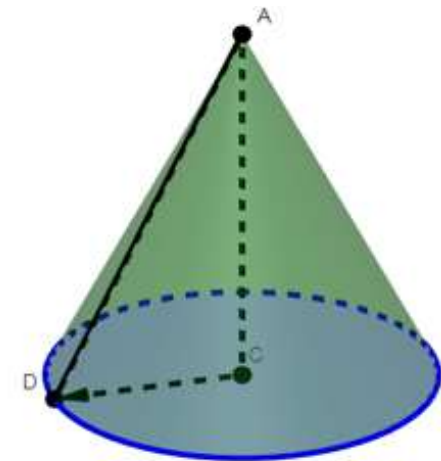
### Конус

Площадь оснований:  $S_{Осн} = \pi R^2$

Площадь боковой поверхности:  $S_{БП} = \pi Rl$

Площадь полной поверхности:  $S_{ПП} = \pi R(l + R)$

Объем конуса:  $V_{Конуса} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$



Конус

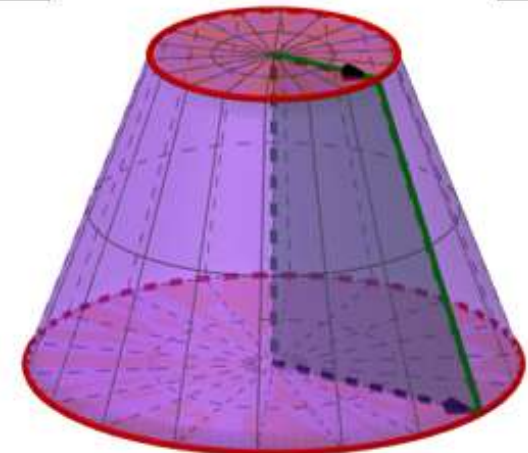
### Усеченный конус

Площади оснований:  $S_{Осн} = \pi(R^2 + r^2)$

Площадь боковой поверхности:  $S_{БП} = \pi l(R + r)$

Площадь полной поверхности:  $S_{ПП} = \pi(R^2 + l(R + r) + r^2)$

Объем усеченного конуса:  $V_{У.К} = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r \cdot R + r^2)$



Усеченный конус

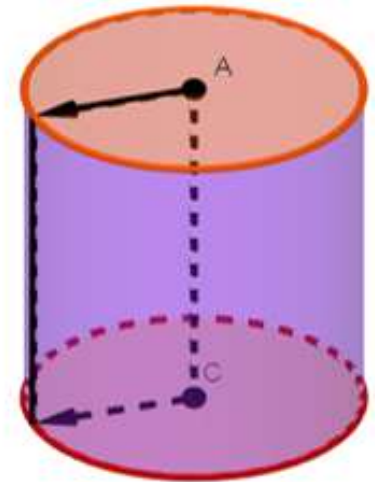
## Цилиндр

Площади оснований:  $S_{Осн} = 2\pi R^2$

Площадь боковой поверхности:  $S_{БП} = 2\pi R h$

Площадь полной поверхности:  $S_{ПП} = 2\pi R(h + R)$

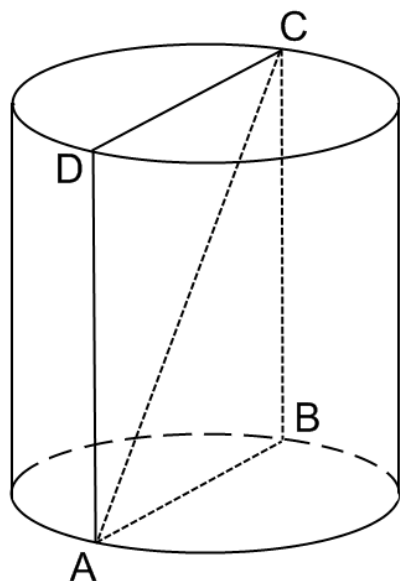
Объем цилиндра:  $V_{Цилиндра} = S_{Осн} h$



Цилиндр

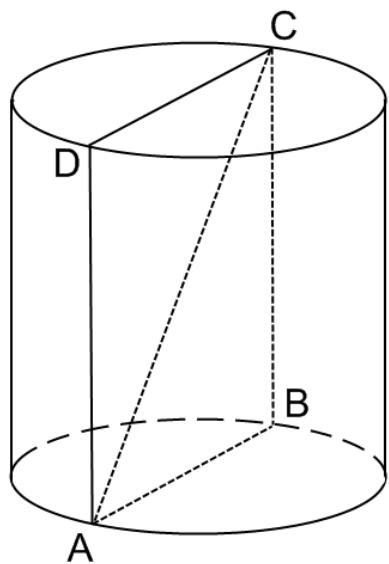
15. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отстоит от нее на расстоянии, равном 15. Диагональ получившегося сечения равна 20, а радиус основания цилиндра 17. Найдите объем цилиндра.

**Ответ:**  $3468\pi$ .



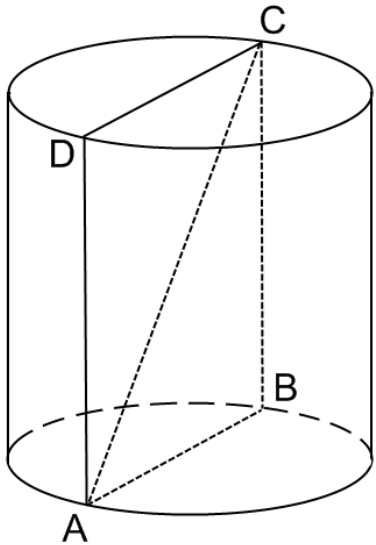
Осьтік қимасының ауданы  $32 \text{ см}^2$ , ал табанының ауданы  $16 \pi \text{ см}^2$  болатын цилиндрдің көлемін табыңыз.

**$75 \pi \text{ см}^3$**



. Цилиндрдің көлемі  $50\pi$  см<sup>3</sup>, ал осьтік қимасының ауданы 20 см<sup>2</sup>. Цилиндр табанының радиусын табыңыз.

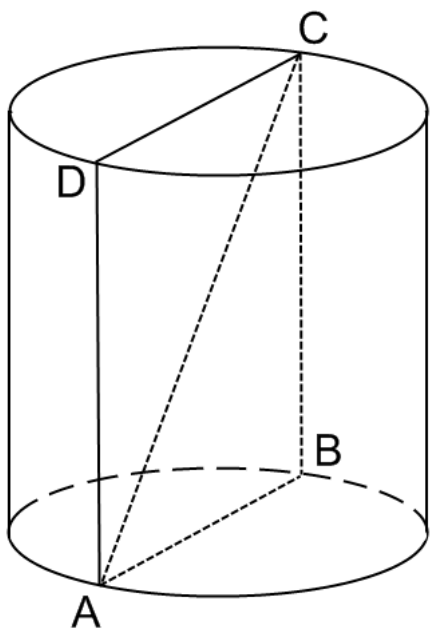
**5 см**





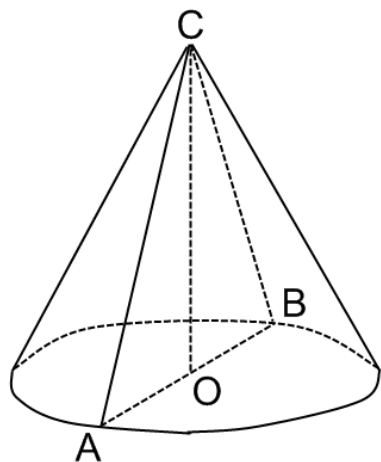
Кубтың диагоналі 2. Осы кубқа сырттай сызылған цилиндрдің көлемін табыңыз.

$$\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$



1. Высота конуса равна 5. На расстоянии 2 от вершины конуса его пересекает плоскость, параллельная основанию. Чему равен объем большего конуса, если объем меньшего составляет 24?

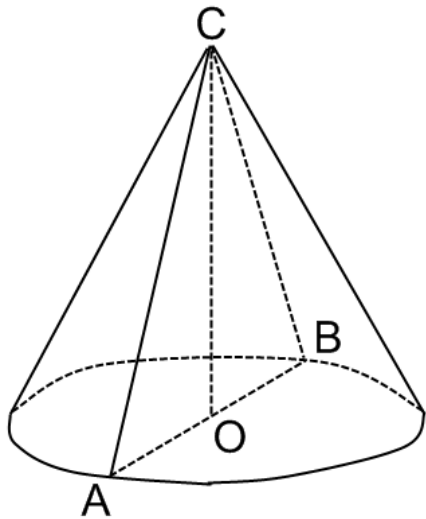
Ответ:  ?



7. Объем конуса равен  $9\sqrt{3}\pi$ . Найдите высоту конуса, если его осевое сечение – равносторонний треугольник.

Ответ:

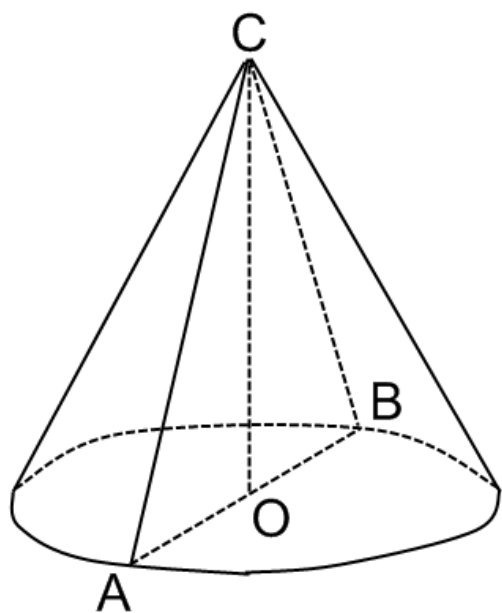
?



10. Высота и образующая конуса относятся как  $12:13$ . Определите полную поверхность конуса, если его объем равен  $800\pi$ .

Ответ:

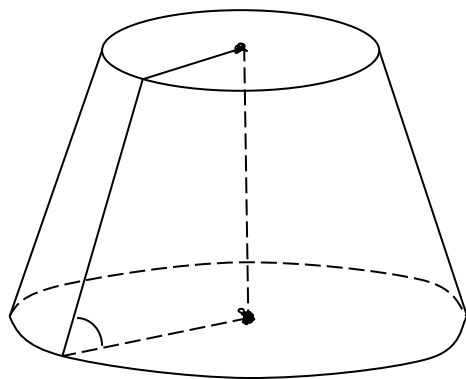
?



25. Радиусы оснований усеченного конуса равны 1 и 9, образующая равна 10. Найдите объем.

Ответ:

?



30. Найдите объем усеченного конуса, если радиусы его оснований равны 3 и 1, а образующая наклонена к нижнему основанию под углом  $60^\circ$ .

Ответ:

?

