12-класс

Сабақтың тақырыбы:
Көпжақтар (пирамида, призма және олардың түрлері) және айналу денелерінің көлемдері

Оқу мақсаты:

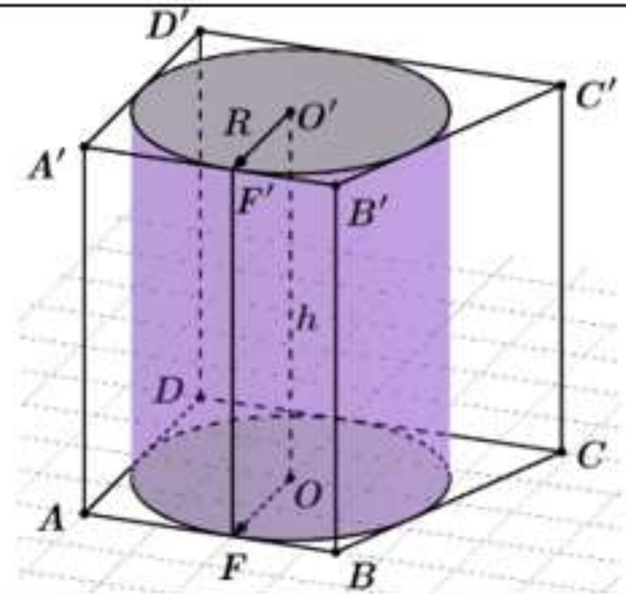
көпжақтар (пирамида, қиық пирамида, призма және олардың түрлері) мен айналу денелерінің (конус, қиық конус, цилиндр, шар және оның бөліктері) комбинацияларына қатысты есептерде денелердің көлемін есептейді

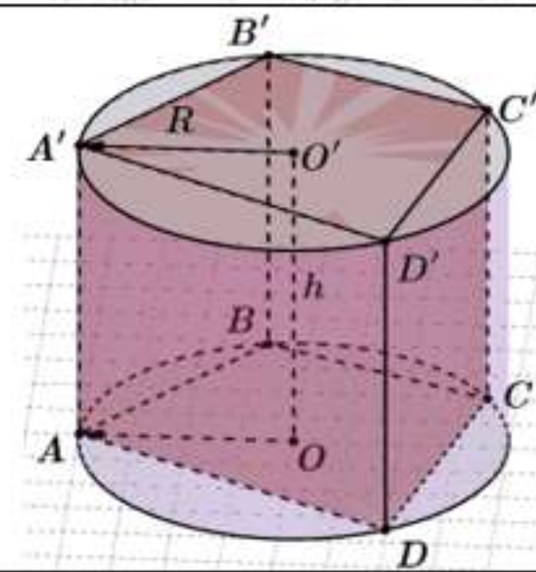
Сабақ мақсаты:

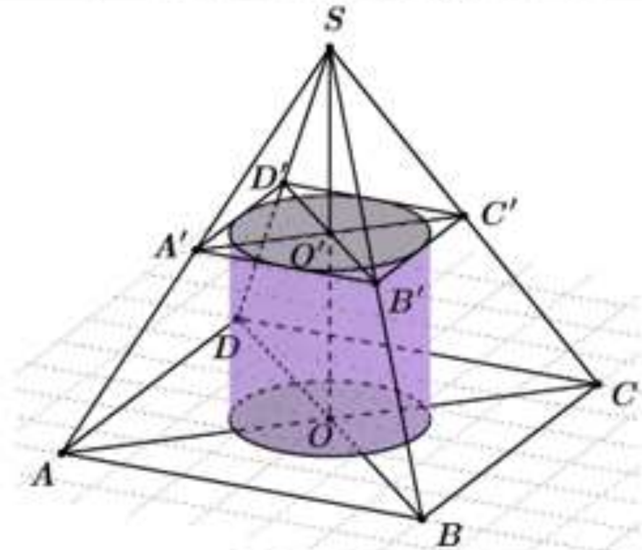
- көпжақтар мен айналу денелерінің комбинацияларына қатысты есептерде денелердің көлемін есептеу

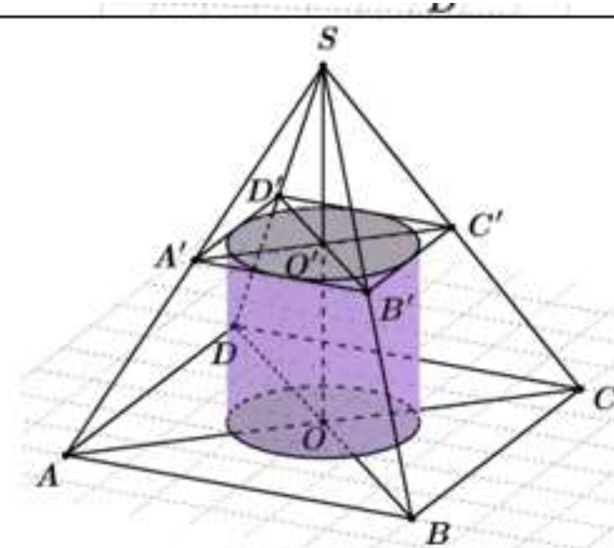
4. *Задание.* Треугольник со сторонами 8 и 5, заключающими угол в 60°, вращается вокруг оси, проходящей через вершину данного угла, перпендикулярно к меньшей из данных сторон. Найдите площадь поверхности полученной фигуры вращения.

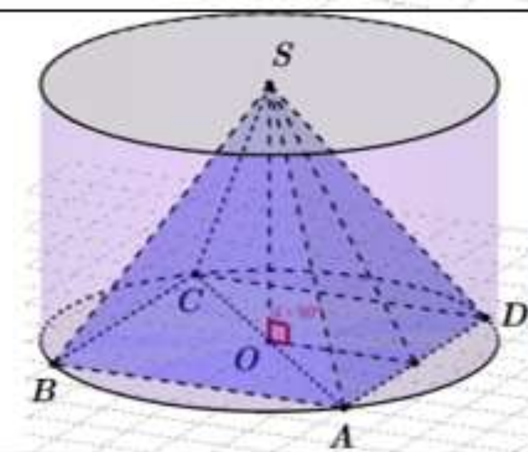
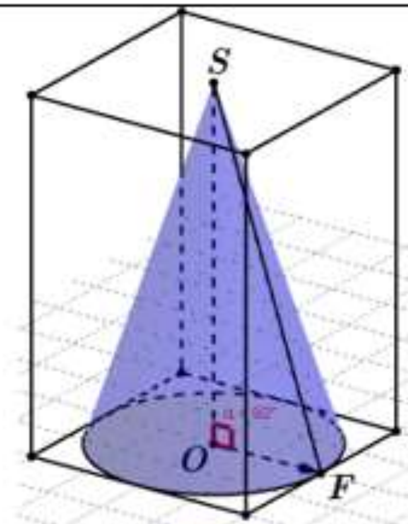
8. *Задание.* Равнобедренная трапеция с основаниями 12 и 18 и острым углом в 60° вращается вокруг меньшего основания. Найдите поверхность и объем тела вращения.

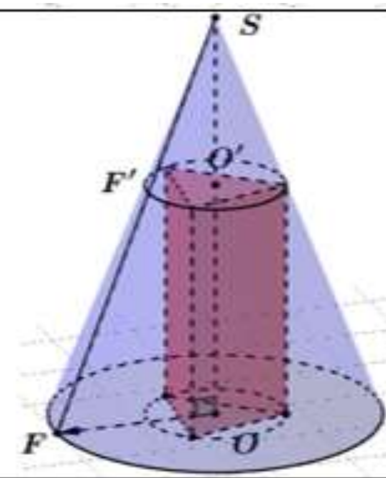
егер цилиндрдің табыны призманың табанына іштей сызылған болса, онда ***цилиндр тік призмаға іштей сызылған*** *болады.*	

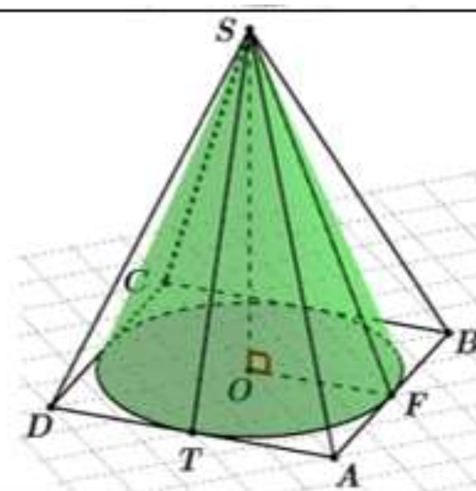
Егер цилиндрдің табандары призманың табандарына сырттай сызылған болса, онда ***цилиндр тік призмаға сырттай сызылған*** *болады.*	

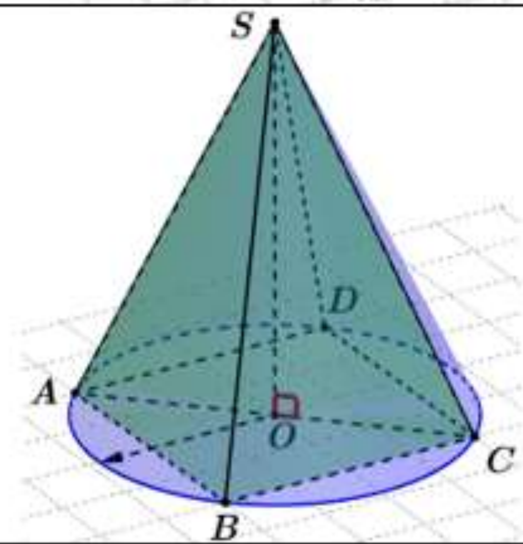
Егер цилиндрдің бір табаны пирамида табанында жатса, басқа табаны цилиндрдің табанына параллель жазықтыққа іштей сызылған болса, онда ***цилиндр пирамидаға іштей сызылған*** *болады.*	

Егер цилиндрдің бір табаны пирамида табанында жатса, басқа табаны цилиндрдің табанына параллель жазықтыққа іштей сызылған болса, онда ***цилиндр пирамидаға іштей сызылған*** *болады.*	

Егер пирамида табаны цилиндр бір табанында іштей сызылған болса, ал пирамида төбесі цилиндрдің басқа табанында жатса, онда ***цилиндр пирамидаға сырттай сызылған*** *болады.*	
Егер конустың табаны призма бір табанында іштей сызылған болса, ал конустің төбесі призманың басқа табанында жатса, онда ***конус призмаға іштей сызылған*** *болады.*	

Егер призманың бір табанының төбелері конустың бетінде жатса, ал басқа табанының төбелері конустың табанында жатса, онда ***конус призмаға сырттай сызылған*** *болады.*	

Егер конустың табаны пирамиданың табанына іштей сызылған болса, ал конустың төбесі пирамида төбесімен сәйкес болса, онда ***конус пирамидаға іштей сызылған*** *болады.*	

Егер конустың табаны пирамиданың табанына сырттай сызылған болса, ал конустың төбесі пирамида төбесімен сәйкес келсе, онда ***конус пирамидаға сырттай сызылған*** *болады.*	

15. Табанының радиусы 6-ға тең цилиндрге конус іштей сызылған. Конустың табаны цилиндрдің табанымен сәйкес келеді, ал конустың төбесі цилиндрдің жоғарғы табанының центрімен сәйкес келеді. Конустың бүйір бетінің ауданы 60π-ге тең. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңыз.

Жауабы: 96π.

16. Биіктігі 16 және табанының радиусы 12-ге тең конусқа, биіктігі 10 болатын цилиндр іштей салынған. Цилиндрдің табанының радиусын табыңыз.

Жауабы: 4,5.

23. Дұрыс үшбұрышты пирамидаға конус іштей салынған. Пирамиданың бүйір жақтары табан жазықтығымен $60°$ бұрыш жасап көлбеулегендігі және конустың табанының радиусы 16-ға тең екендігі белгілі болса, осы конустың бүйір бетінің ауданын табыңыз.

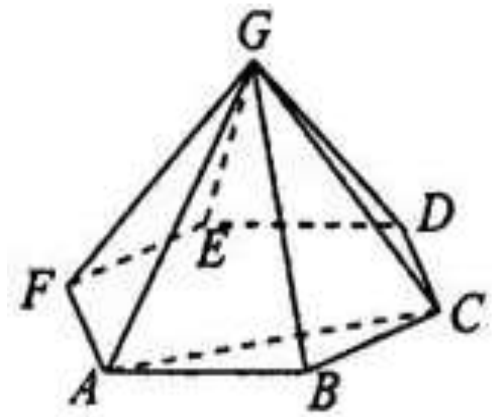
Жауабы: 512π.

25. Цилиндрге дұрыс үшбұрышты призма іштей сызылған. Оның табанының қабырғасы a, ал бүйір қабырғасы b. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы мен оның көлемін табыңыз.

Жауабы: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}ab$; $\frac{\pi}{3}a^2b$.

ТАПСЫРМА-1

Дұрыс алтыбұрышты $GABCDEF$ пирамиданың көлемі 60 см³. $GABC$ үшбұрышты пирамиданың көлемін табыңыз.

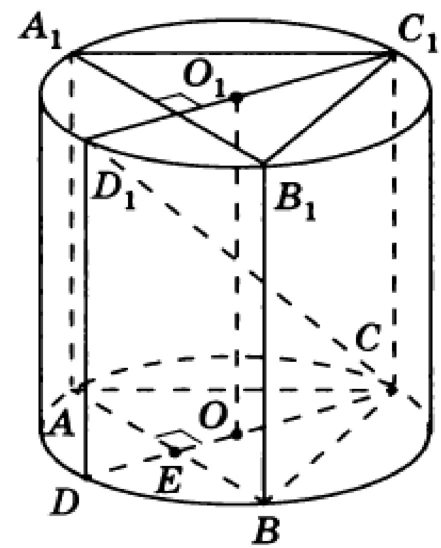


Білгенің жөн!
Дөңгелек ауданын есептеу формуласы:
$S = \pi R^2$, мұндағы R – радиус.
Пирамида көлемін табу формуласы: $V = \frac{1}{3}Sh$

Пирамида табанындағы алтыбұрыштың қабырғасын r арқылы белгілейік. Дұрыс алтыбұрышты 6 бірдей дұрыс үшбұрыштарға бөлуге болады, сондықтан алтыбұрыштың ауданы $6 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$. ABC үшбұрышының ауданын табу керек.
$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot sin\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{1}{6}S_{ABCDEF}$
Осыдан, $GABC$ пирамида табанының ауданы алтыбұрышты пирамиданың табан ауданынан 6 есе кем екені және биіктіктері сәйкес келеті анықталады. Сондықтан пирамидалардың көлемдері олардың аудандарының қатынасындай. $V_{GABC} = \frac{1}{6}V_{GABCDEF} = \frac{1}{6} \cdot 60 = 10$

Жауабы: 10 см^3

Мысал. Теңқабырғалы цилиндрдің остік қимасының диагоналі $a\sqrt{2}$-ге тең. Цилиндрге іштей сызылған дұрыс үшбұрышты призманың бүйір бетінің және толық бетінің аудандарын тап.



Шешуі. Теңқабырғалы цилиндрге $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс призмасы іштей сызылған болсын. (7-сурет). CDD_1C_1 – осітік қима; $OO_1 = h$ - цилиндрдің биіктігі; $OC = R$ – цилиндрдің табанының радиусы. Цилиндр теңбүйірлі болғандықтан, CDD_1C_1 – квадрат болады, яғни цилиндрдің биіктігі оның табанының диаметріне тең. Онда CDD_1C_1 квадратынан $CD = \frac{CD_1}{\sqrt{2}} = a = h$ анықтаймыз. ΔABC – табанға іштей сызылған дұрыс үшбұрыш, радиусы $R = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$. Демек, бұл үшбұрыштың AB қабырғасы мен CE биіктігі тең: $AB = R\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, CE = \frac{3}{2}R = \frac{3}{4}a$. Бұдан, $S_{\text{табан}} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{16}$; $S_{\text{бүйір беті}} = 3S_{ABB_1A_1} = 3AB \cdot BB_1 = 3 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$. Демек, $S_{\text{толық беті}} = S_{\text{бүйір беті}} + 2S_{\text{табан}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} + 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{16} = \frac{15\sqrt{3}a^2}{8}$

Жауабы:

$S_{\text{табан}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$;

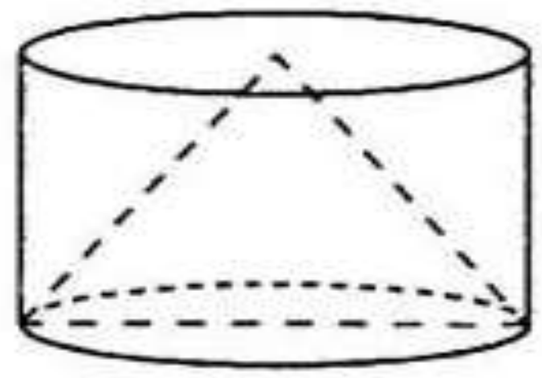
$S_{\text{толық беті}} = \frac{15\sqrt{3}a^2}{8}$

ТАПСЫРМА-1

Цилиндр және конустың табандары және биіктіктері ортақ. Егер конустың көлемі 16 см^3 болса, цилиндрдің көлемін табыңыз.

Білгенің жөн!

Конустың көлемі $V = \frac{1}{3}Sh$; цилиндр көлемі $V = Sh$, мұндағы S – табан ауданы, h - биіктік.

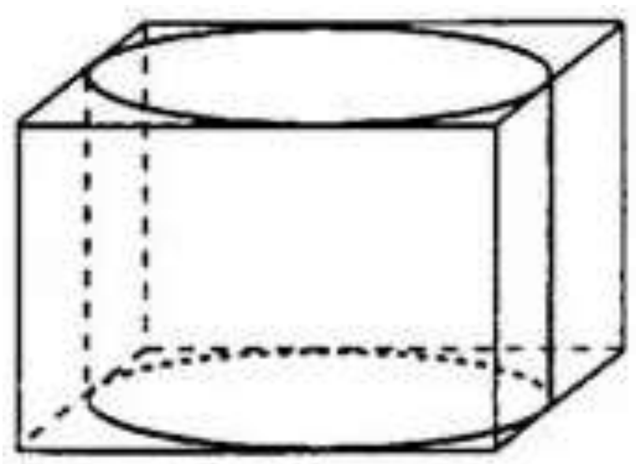


Конустың көлемі $\frac{1}{3}Sh$, ал цилиндрдің көлемі Sh, мұндағы S – олардың ортақ табандарының ауданы, h - ортақ биіктік. Осыдан, цилиндрдің көлемі конустың көлемінен 3 есе артық екенін байқаймыз, $16 \cdot 3 = 48$.

Жауабы: 48 см^3

ТАПСЫРМА-2

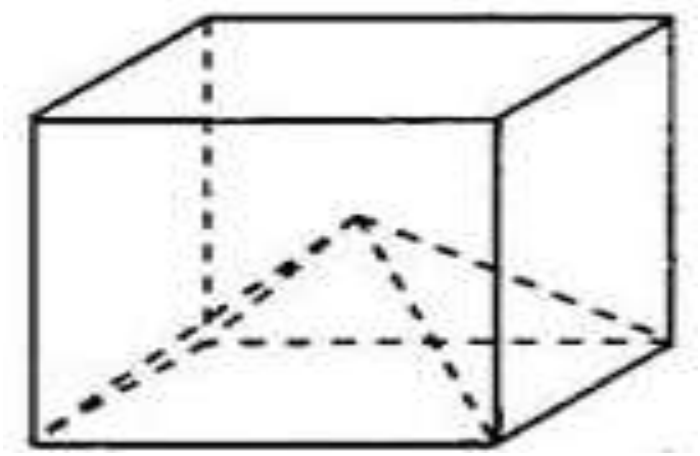
Тікбұрышты параллелепипед табанының радиусы 5 см болатын цилиндрге сырттай сызылған. Параллелепипед көлемі 600 см^3 . Цилиндрдің биіктігін табыңыз.



Параллелепипедтің табанындағы тіктөртбұрыштың әрбір қабырғасы цилиндрдің диаметріне тең, яғни $2 \cdot 5 = 10$ (см) Параллелепипедтің табанының ауданы $10 \cdot 10 = 100$ (см^2). Параллелепипедтің биіктігін параллелепипедтің көлемі формуласынан табамыз: $100h = 600; h = 6$ $(c\text{м})$. Параллелепипедтің биіктігі сонымен бірге цилиндрдің де биіктігі болып табылады

ТАПСЫРМА-3

Куб көлемі 30 м^3. Табаны кубтың табанымен беттесетін, ал төбесі кубтың центрі болатын төртбұрышты пирамиданың көлемін табыңыз.



Білгенің жөн!
Дөңгелек ауданын есептеу формуласы:
$S = \pi R^2$, мұндағы R – радиус.
Пирамида көлемін табу формуласы: $V = \frac{1}{3}Sh$

Кубты төртбұрышты призма ретінде қарастырайық. Оның көлемі $V = S_{\text{табан}}h$. Пирамиданың табаны призманың табанымен беттеседі, ал биіктігі призманың биіктігінен 2 есе қысқа. Сондықтан, $V_{\text{пирамида}} = \frac{1}{3}S_{\text{табан}} \cdot h = \frac{1}{3}S_{\text{табан}} \cdot \frac{1}{2}h_{\text{куб}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{куб}} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5\ (\text{м}^3)$

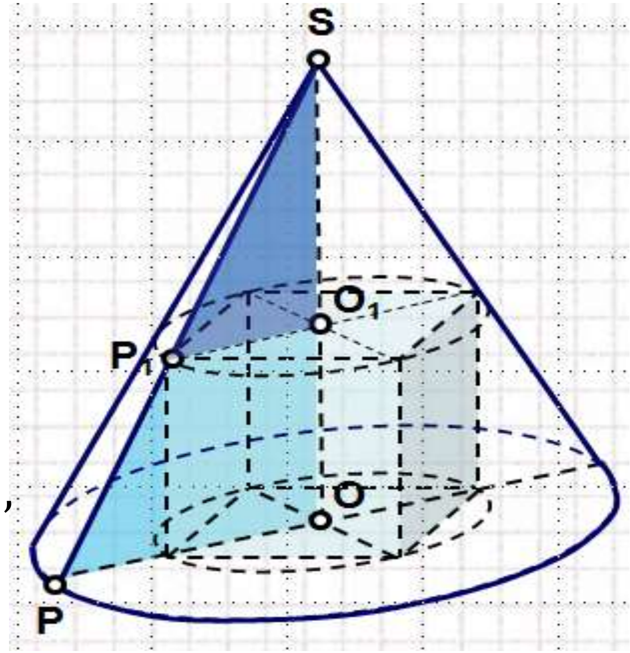
Жауабы: $5\ \text{м}^3$

ТАПСЫРМА-2

Жасаушысы $6\sqrt{6}$ см және биіктігі 12 см болатын конусқа куб іштей сызылған. Кубтың көлемін табыңыз.

ΔSOP үшбұрышынан $OP = \sqrt{SP^2 - SO^2} = \sqrt{216 - 144} = 6\sqrt{2}$. a – куб қабырғасы, онда $a = R\sqrt{2}$, Сонымен бірге, табандаға шеңберлер кубтың табанындағы шаршыларға сырттай сызылған цилиндрді байқаймыз. OO_1- кубқа және цилиндрге ортақ биіктік, , $OO_1 = a$, $O_1P_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $SO_1 = SO - SO_1 = 12 - a$.

Бұдан $\Delta SO_1P_1 \sim \Delta SOP$ $(\angle O_1 = \angle O = 90^0$, $\angle S -$ ортақ) ,



$\frac{SO_1}{SO} = \frac{P_1O_1}{PO}$, $\frac{12-a}{12} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{6\sqrt{2}}$

Бұдан $a = 6$, $V_{\text{куб}} = a^3 = 6^3 = 216$ (см^3)

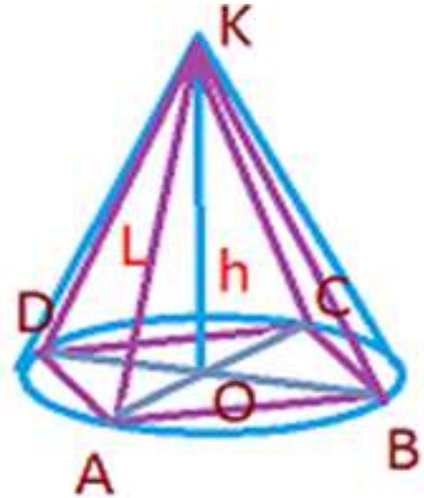
Жауабы: 216 см^3

ТАПСЫРМА-10

Конусқа іштей тіктөртбұрышты пирамида іштей сызылған. $OK = 12$ см, $DA = CB = 6$ см,

$$DC = AB = 8 \text{ см}.$$

Пирамиданың толық бетінің ауданының конустың толық бетінің ауданына қатынасын табыңыз. Жауабын ондық үлеске дейін дөңгелектеңіз.

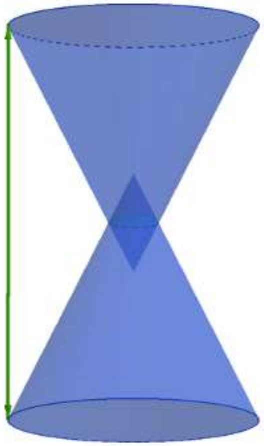


ΔBAD үшбұрышын қарастырайық: $BD^2 = 6^2 + 8^2 = 100$; $BD = 10$ см; $r = \frac{BD}{2} = 5$ см. Конус табаны ауданы: $S_k = \pi r^2 = 25\pi$. ΔKOA үшбұрышын қарастырайық: $KA^2 = 12^2 + 5 = 169$; $KA = 13$ см; Конустың бүйір бетінің ауданы: $S_{k.б} = \pi rl = \pi rAK = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\pi$. Конустың толық бетінің ауданы: $S_{\text{к.тб}} = 65\pi + 25\pi = 90\pi$. Пирамида табанының ауданы: $S_{\text{п}} = 6 \cdot 8 = 48$ $см^2$. ΔKOA және ΔADK үшбұрыштарының аудандарын табайық: $S_{\Delta ABK} = \frac{1}{2} \cdot 12{,}4 \cdot 8 = 49{,}6$ (см^2) және $S_{\Delta AKD} = \frac{1}{2} \cdot 12{,}6 \cdot 6 = 40$ (см^2). Пирамиданың бүйір бетінің ауданы: $S_{\text{п.б}} = 49{,}6 \cdot 2 + 40 \cdot 2 = 179{,}2$ (см^2)

Енді пирамиданың толық бетінің ауданын есептейік: $S_{\text{п.тб}} = 179{,}2 + 48 = 227{,}2$ (см^2). Осыдан, аудандардың қатынасын анықтай аламыз: $\frac{S_{\text{п.тб}}}{S_{\text{к.тб}}} = \frac{227{,}2}{90 \cdot 3{,}14} \approx 0{,}8$. Жауабы: 0,8

ҮЙ ТАПСЫРМАСЫ

1. Құмсағат табандары параллель екі бірдей қиық конустан тұрады. Қиық конустың биіктігі $H = 16$. Конустардың бүйір беттерінің қиылысу шеңберінің радиусы 1-ге тең. Әрбір конустың төбесіндегі бұрыштың жартысының тангенсі $\frac{1}{2}$ − ге тең. Құмсағаттың V көлемінің $\frac{3}{\pi}$ − ге көбейтіндісін тап



Конустардың ортақ айналу осьтері арқылы өтетін α жазықтығымен қимасын аламыз. Суретте DI – конустардың айналу осі және құмсағаттың биіктігімен сәйкес 16-ға тең. CD, DE − фигураның табанындағы шеңбердің радиустар, ал BO, OF − конустардың қиылысуындағы шеңбердің радиустары, $BO = OF = 1$. Конустың $\angle CKE$ бұрышы қақ бөлінеді, сондықтан $tg\angle CKD = tg\angle DKE = \frac{1}{2}$. ΔCKD және ΔBKO үшбұрыштары ұқсас, $\frac{CD}{BO} = \frac{KD}{KO}$.
Айналу осі табан жазықтықтарына және конустардың қиылысу жазықтығына перпендикуляр.

Бұдан ΔCKD және ΔBKO үшбұрыштары тікбұрышты.

$$DI = H \Rightarrow DO = OI = H{:}2 = 8; KO = BO{:}tg\angle CKD = 1{:}\frac{1}{2} = 2 \Rightarrow KD = KO + OD = 2 + 8 = 10 \Rightarrow \frac{CD}{BO} = \frac{KD}{KO} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow CD = 5.$$

$CBOFEDC$ қиық конусының көлемін $KCDE$ және $KBOF$ көлемдерінің айырмасы ретінде қарастыруға болады,

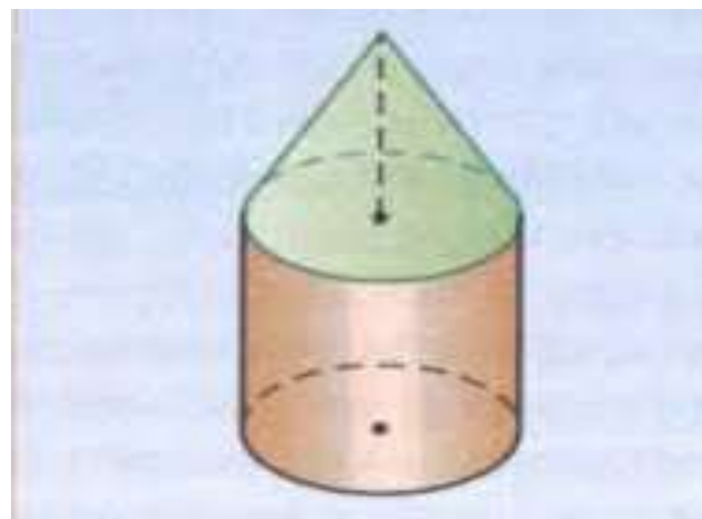
$$V_{CBOFEDC} = V_{KCDE} - V_{KBOF} = \frac{1}{3}\cdot\pi CD^2\cdot KD - \frac{1}{3}\cdot\pi BO^2\cdot KO = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 5^2\cdot 10 - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2\cdot 2 = \frac{248\pi}{3}.$$

Құмсағаттың көлемі: $V = 2\cdot\frac{248\pi}{3}\cdot\frac{3}{\pi} = 496.$

Жауабы: 496

ҰЖЫМДЫҚ ЖҰМЫС

Тапсырыс беруші ұсынылған нұсқалардың біріне сәйкес гүл сатуға арналған павильон салуды жоспарлап отыр. Дәстүрлі модельдің табаны – қабырғасы 8 м-ге тең квадрат, ал барлық ғимараттың биіктігі 5 м және қабырғаларының биіктігі 3 м тең. Сатып алушыларды тарту үшін тапсырыс беруші биіктігі бірдей, цилиндр пішінді салынған павильонға қызығушылық танытады. Ғимараттардың көлемі бірдей болатындай, цилиндр пішінді павильон үшін табанының радиусы қандай болуы керек?



ҮЙ ТАПСЫРМАСЫ

1.Көлемі 4π/3 болатын конусқа іштей шар сызылған. Биіктігі 3-ке тең конустың көлемін табыңыз. Жауабы: 3π.
2.Дұрыс төртбұрышты пирамида шарға іштей сызылған. Пирамиданың биіктігі шардың центрімен 4 және 5 бөліктерге бөлінеді. Пирамиданың көлемін табыңыз. Жауабы: 54.
3.Шарға теңқабырғалы конус іштей сызылған. Осы денелердің көлемдерінің қатынасын табыңыз. Жауабы: 32/9. (Жасаушы табандағы диаметріне конгруэнтті конус – теңқабырғалы конус деп аталады. Теңқабырғалы конустың осьтік қимасы тең қабырғалы үшбұрыш болады.)
4. Радиусы 6-ға тең шарға сырттай сызылған қиық конустың жасаушысы 13-ке тең. Қиық конустың көлемін табыңыз. Жауабы: 532π.

Сабақ мақсаты:

- көпжақтар мен айналу денелерінің комбинацияларына қатысты есептерде денелердің көлемін есептеу

Кері байланыс

- нені білдім, нені үйрендім
- нені толық түсінбедім
- жұмысты жалғастыру қажет