# СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Петропавл қаласы
NIS
Назарбаев Зияткерлік мектептері

## УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ НАЗАРБАЕВ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ШКОЛ

ПЕТРОПАВЛОВСК, 2019

**УДК 517**
**ББК 22**
**Т 49**

**Рецензенты:**

**Б.Е. Батыров** – кандидат физико-математических наук, учитель математики Назарбаев Интеллектуальной школы химико-биологического направления г. Петропавловск

**А.А. Таджигитов** - кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой математики СКГУ.

**Составители:**

**Тлегенова Г.Б.** – учитель математики Назарбаев Интеллектуальной школы г. Петропавловск

**Тулебаева А. К.** – учитель математики Назарбаев Интеллектуальной школы г. Петропавловск

**Бисмельдинова Б.** – учитель математики Назарбаев Интеллектуальной школы г. Павлодар

**Сборник задач по дифференциальным уравнениям:** *учебное пособие. / Г.Б. Тлегенова, А.К. Тулебаева, Б. Бисмельдинова – 2019.* – 65с.

Сборник задач разработан на основе Учебного плана по предмету «Математика» для 12 класса (стандартный уровень обучения) в соответствии с требованиями NIS – program. В каждый из разделов включены краткая справочная информация, образцы решения задач на составление дифференциальных уравнений, подбор разноуровневых заданий для самостоятельного решения с ответами.

Пособие адресовано учащимся 12 классов НИШ, учителям математики в качестве сборника заданий по данному курсу и ориентировано на обзорное повторение данных тем.

**УДК 517**
**ББК 22**
**Т 49**

## Оглавление

## Введение

При изучении многих процессов, протекающих в природе, бывает довольно сложно установить зависимость между функциями, характеризующими те или иные величины. Но в некоторых случаях возможно установить связь между теми же функциями и их производными. При этом мы получаем уравнения, содержащие неизвестные функции под знаком производной или дифференциала. Уравнения, в которых неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала называются дифференциальными уравнениями, которые могут быть использованы в качестве математических моделей реальных процессов.

Сборник заданий соответствует требованиям NIS – program по математике для 12 класса (стандартный уровень обучения), построен на основе рекомендуемой в среднесрочном планировании деятельности. Каждый раздел включает в себя краткую справочную информацию, образцы примеров с решениями, а также задания с ответами. Задания подобраны по темам, систематизированы по методам решения и уровню сложности. Охватывают основные содержательные линии курса по данному разделу, включенные в программу 12 класса.

Пособие может быть использовано, как для проведения групповых и индивидуальных занятий, так и для самостоятельного изучения данных разделов, поскольку ко всем заданиям пособия предлагаются ответы, а также этому способствуют теоретические пояснения и разобранные решения аналогичных заданий. Предлагаемая структура позволяет использовать данную книгу для подготовки к сдаче Внешнего суммативного оценивания.

Пособие адресовано широкому кругу читателей: учащимся 12-х классов Назарбаев Интеллектуальных школ и учителям математики для использования в качестве сборника заданий по данному курсу, для организации подготовки учащихся к экзаменам, а также ориентировано на обзорное повторение данных тем.

# Раздел 1. Дифференциальные уравнения

## 1.1 Дифференциальные уравнения. Частное и общее решение.

***Цель обучения:***
иметь общее понятие о дифференциальных уравнениях;
знать определения частного и общего решений уравнений.

**Дифференциальное уравнение** *первого порядка* имеет общий вид:

$$F(x,y,y') = 0 \qquad (1)$$

или (если это уравнение можно разрешить относительно y′) вид:

$$y' = f(x,y).$$

**Содержит:**

1) независимую переменную $x$ ;
2) зависимую переменную $y$ (функцию);
3) первую производную функции: $y'$.

*В некоторых случаях в уравнении может отсутствовать «икс» или (и) «игрек», но важно чтобы в ДУ была первая производная.*

**Решить дифференциальное уравнение** – это значит, найти множество всех функций, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций часто имеет вид $y=f\,(x,C)$ ($C$ – произвольная постоянная), который называется **общим решением дифференциального уравнения.**
Иногда, впрочем, это решение получается в неявной форме: $Ф(x,y,C)=0$. В этом случае соотношение $Ф(x,y,C)=0$ называется **общим интегралом** уравнения (1).

Решение, которое получается из общего решения при некотором фиксированном значении произвольной постоянной $C$, называется **частным решением**.

Общее решение дифференциального уравнения с геометрической точки зрения представляет собой семейство кривых на плоскости (зависящих от одного параметра C); их называют **интегральными кривыми** дифференциального уравнения.

Интегральная кривая – это график решения дифференциального уравнения.

Например, общее решение дифференциального уравнения  задается формулой , где C – произвольная постоянная.

Семейство интегральных кривых данного уравнения – семейство парабол, получаемое из параболы  параллельным переносом вдоль оси Oy.

**Пример 1.**
Доказать, что функция $y(x) = x^2 + 3x + 6$ является решением дифференциального уравнения $y' = 2x + 3$.

***Доказательство.*** Подставим функцию $y(x) = x^2 + 3x + 6$ в заданное дифференциальное уравнение $y' = 2x + 3$.

$$(x^2 + 3x + 6)' = 2x + 3$$
$$(x^2)' + (3x)' + (6)' = 2x + 3$$
$$2x + 3 = 2x + 3.$$

В результате получили тождество, а это означает, что функция $y(x) = x^2 + 3x + 6$ является решением указанного дифференциального уравнения.

*Что и требовалось доказать.*

**Пример 2.**

Решить дифференциальное уравнение $\left(\sqrt{x} + 1\right) \cdot y' = 2$.

***Решение.***

В данном случае $f(x) = \left(\sqrt{x} + 1\right)$, $g(x) = 2$. Делим левую и правую части заданного дифференциального уравнения на $f(x)$, в результате будем иметь:

$$y' = \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$$

Полученный интеграл найдем с помощью замены переменной:

$$y(x) = \int \frac{2}{\sqrt{x} + 1} dx \quad \left\| \begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right\|$$
$$= \int \frac{2tdt}{\sqrt{t^2} + 1} = 2 \int \frac{tdt}{t + 1} = 2 \int \frac{(t + 1) - 1}{t + 1} dt =$$

$$= 2 \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t+1} = 2t - 2 \int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2\ln|t + 1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2ln\left|\sqrt{x} + 1\right| + C.$$

***Ответ:*** $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = 2\sqrt{x} - 2\ln\left|\sqrt{x} + 1\right| + C.$

## Упражнения

**Уровень А.**

**1.** Показать, что заданные функции являются решениями соответствующих уравнений:

***a***) $y = lncosx, y' = -tgx$;

***b***) $y = Csinx, y'tgx - y = 0$;

***c***) $y = Ce^{-3x}, y' + 3y = 0$.

**2.** Проверить, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений указанные функции:

**a)** $y = \frac{1}{3(x+1)}, y' = 3y^2$;

**b)** $y = 3 - e^{-x^2}, xy' + 2y = e^{-x^2}$**.**

**3.** Решить задачу Коши:

**a)** $y' = sin5x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$

**b)** $\frac{dx}{dt} = 3, x = 1$ при $t = -1;$

$c)\ y' = 2x + 1, y(2) = 5;$

$d)\ y' = e^{-3x}, y(0) = \frac{2}{3}.$

**Уровень B.**

**1.** Показать, что заданные функции являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений:

***a***) $x^2 + 2xy = C, (x + y)dx + xdy = 0;$

***b***) $y - x = Ce^y, (x - y + 1)y' = 1;$

***c***) $y = Ce^{x^3}, dy - 3x^2ydx = 0;$

***d***) $y' = 3x + y + 5; y(x) = e^x - 3x - 8.$

**2.** Проверить, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений указанные функции:

**a)** $v = \frac{c}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{a}}\right), a\frac{dv}{dt} + bv - c = 0;$

**b)** $x^2 + t^2 - 2t = C,\ x\frac{dx}{dt} + t = 1.$

**3.** Показать, что функция *y(x)* является решением дифференциального уравнения.

**a)** $y' = 3x + y + 5; y(x) = e^x - 3x - 8;$

**b)** $y' + 2y = e^{-x};\ y(x) = 3e^{-2x} + e^{-x};$

**c)** $y'' + 2y' - 2 = 0;\ y(x) = 2 + 3e^{-2x} + x.$

**4.** Показать, что функция *y(x)* является решением задачи Коши.

**a)** $x + y - 2 + (1 - x)y' = 0, y(2) = 1; y(x) = 1 + (x - 1)\ln(x - 1);$

**b)** $x(x - 1)y' + y = x^2(2x - 1),\ y(2) = 6; y(x) = \frac{x}{x-1} + x^2;$

**c)** $xy' = y(lny - lnx),\ y(-0{,}5) = -0{,}5; y(x) = xe^{1+2x}.$

**5.** Показать, что при каждом действительном значении параметра *C* функция *y(x)* является решением дифференциального уравнения.

**a)** $xy' + y = y^2lnx, y(x) = \frac{1}{1+cx+lnx};$

**b)** $xy' - 2y = x^3cosx,\ y(x) = Cx^2 + x^2sinx;$

**c)** $y' - ycosx = sin2x, y(x) = Ce^{sinx} - 2(1 + sinx).$

## 1.2 Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения

***Цель обучения:*** находить частные и общие решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, однородных, линейных уравнений первого порядка.

Выделяют несколько типов (видов) обыкновенных дифференциальных уравнений:

- Уравнения с разделяющимися переменными,
- Однородные уравнения,
- Линейные уравнения
- и др.

Мы будем классифицировать эти уравнения в зависимости от вида функции $f(x,y)$ .

### 1.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения с **разделяющимися переменными** имеют вид: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

**Метод решения:** разделить переменные (т.е. отделить их друг от друга), а затем проинтегрировать:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} =$$

$$= f(x) \cdot dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx \Rightarrow G(y) = F(x) + C.$$

**Пример 1.**

Решить дифференциальное уравнение: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$

***a)*** Найти общее решение;

***b)*** Найти частное решение, которое удовлетворяет условию $y(0) = 2$.

***Решение.***

***a)*** *Шаг 1* — Разделяем переменные: $y^2 dy = x dx$;

*Шаг 2* — Интегрируем обе части: $\int y^2 dy = \int x dx \;\; \Rightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C$ ;

*Шаг 3* — Выражаем у: $y = \left(\frac{3}{2}x^2 + 3C\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{2}x^2 + C_1\right)^{\frac{1}{3}}$ - это общее решение.

***b)*** Используем начальные условия, т.е. подставляем 0 вместо $x$ и 2 вместо $y$ в общее решение уравнения, получаем:

$$2 = \left(\frac{3}{2}(0)^2 + C_1\right)^{\frac{1}{3}} = C_1^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2^3 = 8.$$

Таким образом, частное решение уравнения: $y = \left(\frac{3}{2}x^2 + 8\right)^{\frac{1}{3}}$.

**Пример 2.**

Найти общее решение дифференциального уравнения:
$e^y dy + (4x^3 - 2x)\, dx = 0$.

***Решение.***

Перенеся последнее слагаемое в правую часть, получим:
$e^y dy = -(4x^3 - 2x)\, dx$, $\quad \int e^y\, dy = \int -(4x^3 - 2x)\, dx$.

Находя первообразные от обеих частей, получим:
$e^y + C_1 = -\frac{4x^4}{4} + \frac{2x^2}{2} + C_2$, $\quad e^y = -x^4 + x^2 + C$.

Поскольку $C_1$, $C_2$ – произвольные вещественные числа, мы можем объединить эти константы в одну $(C = C_2 - C_1)$. Полученное соотношение позволяет найти функцию $y(x)$ в явной форме и получить окончательный ответ в виде общего решения:

$$y = ln(-x^4 + x^2 + C).$$

**Пример 3.**

Решить уравнение $y\, dx + x\, dy = 0$.

***Решение.***

Имеем дифференциальное уравнение 1-го порядка ***с разделяющимися переменными***, записанное через дифференциалы. Разделение переменных дает:

$$xdy = -ydx \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}.$$

После интегрирования получаем:

$$ln|y| = -ln|x| + lnC \Rightarrow ln|y| = ln|x|^{-1} + lnC.$$

(Произвольная постоянная интегрирования здесь записана в логарифмическом виде для удобства дальнейших преобразований).

$ln|y| = ln(C|x|^{-1}) \Rightarrow ln|y| = ln\frac{C}{|x|}$ .

Отсюда находим **общее решение уравнения:** $y = \frac{C}{x}$**.**

## Упражнения

**Уровень А.**

**1.** Найти общие решения уравнений с разделяющимися переменными:

**a)** $x^3(y^2 - 1)dx + (1 + x^4)dy = 0$;
**b)** $(x^2 + 2)y' = x\cdot\mathrm{tg}y$;
**c)** $(x + 5)dy - (y + 1)xdx = 0$;
**d)** $(x + 3)ydy + (y + 2)dx = 0$;
**e)** $(x^3 - 9)\sin y y' = x^2\cos y$;
**f)** $x^2(1 + y^2)dx = y(2 + x^3)dy$;
***g)*** $y' = \frac{2y+5}{2x-1}$;
**h)** $x^3 y' + y^2 = 0$;
**i)** $y'\,\mathrm{tg}x = y - 2$;
**j)** $xydx + (x + 1)dy = 0$.

***Ответы:***

***a***) $\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2 = \frac{C}{x^4+1}, y=-1$; ***b***) $\sin y = C\sqrt{x^2+2}$;

***c)*** $y = \frac{Ce^x}{(x+5)^5} - 1,\ x = -5$; ***d)*** $(x+3)e^y = C(y+2)^2,\ y=-2$;

***e)*** $\cos y = \frac{C}{\sqrt[3]{x^3-9}}$; ***f***) $(y^2+1)^3 = C(x^3+2)^2,\ x = -\sqrt[3]{2}$;

***g)*** $y = \frac{C(2x-1)-5}{2}$; ***h)*** $y = \frac{2x^2}{2Cx^2-1},\ y=0$;

***i)*** $y = 2 + C\sin x$; ***j)*** $x=-1,\ y = C_1(x+1)e^{-x}$.

**2.** Найти частный интеграл (решение) дифференциального уравнения, удовлетворяющий начальным условиям (решить задачу Коши):

***a***) $\frac{dy}{dx} + 4 = 12x,\ x=-2,\ y=30$; ***b)*** $3y^2\frac{dy}{dx} = 2x+1,\ x=2,\ y=2$;

***c)*** $\frac{dy}{dx}\sin x - y\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{4},\ y=1$; ***d)*** $e^y\frac{dy}{dx} + \sin x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y=1$;

***e)*** $2\sqrt{xy}dx = dy,\ y(1)=1$; ***f)*** $(1+x^3)y' = 3x^2y,\ y(0)=2$;

***g)*** $(1+x^2)dx = xydy,\ y(2)=1$; ***h)*** $\frac{dy}{dx} = 6y^2x\ ;\ y(1) = \frac{1}{25}$.

***Ответы:***

***a)*** $y = 6x^2 - 4x + C,\ C=-2 \rightarrow y = 6x^2 - 4x - 2$;

***b)*** $y^3 = x^2 + x + C,\ C=2 \rightarrow y^3 = x^2+x+2$;

***c)*** $y = \sin x + C,\ C=0 \rightarrow y = \sin x$; ***d)*** $y = \ln(\cos x + C),\ C=e \rightarrow y = \ln(\cos x + e)$;

***f)*** $2\sqrt{y} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} = C,\ C = \frac{1}{3} \rightarrow\ 2\sqrt{y} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{1}{3}$;

***g)*** $y = (1+x^3)C,\ C=2 \rightarrow y = 2(1+x^3)$;

***h)*** $y = \sqrt{2\ln|x| + x^2 + C},\ C = \ln\frac{1}{4} - 3 \rightarrow y = \sqrt{\ln\frac{x^2}{4} + x^2 - 3}$.

**Уровень В.**

**1.** Найти общие решения уравнений с разделяющимися переменными:

***a)*** $(3+\ln y)yxdx - (x^2+2)dy = 0$; ***b)*** $(e^{2x}+5)y^2dy - (1+y^3)e^{2x}dx = 0$;

***c)*** $3x^2\sqrt{9-y^2} = y'^{(1+x^6)}$; ***d)*** $3y' + 2 = \sqrt{2x+3y-4}$;

***e)*** $3y' + 5 = (5x+3y+7)^3$; ***f)*** $2x^2yy' + y^2 = 2$;

***g***) $y'\cot^2 x + \tan y = 0$; ***h***) $(1+e^x)y' = e^x$.

***Ответы:***

***a)*** $\ln y = C\sqrt{x^2+2} - 3$; ***b)*** $(y^3+1)^2 = C(e^{2x}+5)^3$;

***c)*** $y = 3\sin(\mathrm{arctg}\, x^3 + C),\ y = \pm 3$; ***d)*** $2\sqrt{2x+3y-4} = x + C$;

***e***) $-\frac{1}{2(5x+3y+7)^2} = x + C$; ***f***) $y^2 - 2 = Ce^{\frac{1}{x}},\quad C \in R$;

***g***) $ln|siny| + tanx - x = C,\ \ y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; ***h***) $y = ln\ (e^x + 1) + C$.

**2.** Найти общие решения уравнений методом замены параметра:
**(**Уравнения вида $\boldsymbol{y' = f(ax + by + c)}$ сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными при помощи замены: **z=** $\boldsymbol{ax + by + c}$**).**

**a)** $y' = cos^2(x - y)$;

***b***)$y' = e^{x+2y}$;

***c***) $y' = \sqrt{2x + y + 1}$;

***d***) $y' = (10x + 5y + 1)^2$;

***e***) $y' = (x + y)^{10} - 1$;

***f)*** $(x + 2y)y' = 1,\ y(0) = -1$;

***g***) $y(1 + xy)dx = x(1 - xy)dy$;

***h***) $(x + y + 1)dx + (4x + 4y + 10)dy = 0$.

***Ответы:***

***a)*** $y = x - arcctg(C - x)$; ***b)*** $y = 2e^{x-y} - C$; ***c)***$\sqrt{2x + y - 1} - 2\ln(\sqrt{2x + y - 1} + 2) = \frac{1}{2}x + c$; ***d)*** $\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\frac{\sqrt{2}}{2}(10x + 5y + 1) = 5x + c$; ***e)*** $9(x + y)^9 = \frac{1}{C-x}$; ***f)*** $x + 2y + 2 = Ce^y \ \ \rightarrow \ \ x + 2y + 2 = 0$;

***g***) $ln\left|\frac{y}{x}\right| - xy + C = 0,\ x = 0$; ***h)*** $\frac{x}{2} + 2y - \ln|x + y + 3| + C = 0$.

### 1.2.2 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение вида $F(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ ***называется однородным уравнением 1-го порядка,*** где $F(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные непрерывные функции одинаковой степени.

***Метод решения*:**

Для решения однородного уравнения проводится замена неизвестной функции по формуле: $u = \frac{y}{x}$. Тогда может быть выражена неизвестная функция $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ и ее производная $\boldsymbol{y'}(\boldsymbol{x})$: $y=ux,\ y' = u'x + u$.

Новая функция $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными: $u'x + u = f(u) \rightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = f(u) - u$.

Зависимость между переменными $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{x}$, полученная в ходе интегрирования этого уравнения, позволяет на основе **равенства** $\boldsymbol{y = u \cdot x}$ найти исходную неизвестную функцию *y*.

**Пример 1**.

Решить дифференциальное уравнение: $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

***Решение:***

**Является ли данное уравнение однородным?**

Алгоритм проверки:

1. В исходное уравнение **вместо** $y$ подставляем $\lambda y$, **производную не трогаем**: $\lambda x{\cdot}y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}$ *(буква лямбда – это некоторый абстрактный числовой параметр)*

2. Если в результате преобразований удастся сократить **ВСЕ** «лямбды» (т.е. получить исходное уравнение), то данное дифференциальное уравнение **является однородным**.

$\lambda x{\cdot}y'=\lambda y-\lambda x e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}} \rightarrow \lambda x{\cdot}y'=\lambda(y-xe^{\frac{y}{x}}) \rightarrow xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

**Вывод:** Данное уравнение является однородным.

Подставляем $y=ux$, $y' = u'x + u$ в исходное уравнение: $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

Получаем $x(u'x+u)=ux-xe^{\frac{ux}{x}}$.

После подстановки проводим максимальные упрощения уравнения:

$x(u'x+u)= x(u-e^{u})$,

$u'x+u= u-e^{u}$,

$u'x= -e^{u}$.

Далее решаем уравнения с разделяющимися переменными. Если $u$ – это функция, зависящая от «икс», то $u' = \frac{du}{dx}$.

Таким образом: $x\frac{du}{dx} = -e^{u}$. Разделяем переменные.

Переменные разделены, интегрируем:

$-\int e^{-u}du = \int \frac{dx}{x} \rightarrow \quad e^{-u} = ln|x| + ln|C|$.

После того, как уравнение проинтегрировано, нужно провести *обратную замену*.

Если $y = ux$, то $u = \frac{y}{x}$. В данном случае: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$

***Ответ:*** общий интеграл: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$, где $C$ - *const*

**Пример 2.**

Решить уравнение $y' = tg\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$.

***Решение.***

Данное уравнение представляет собой ***однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка***. Произведем замену неизвестной функции: $u = \frac{y}{x}$; $y = ux$; $y' = u'x + u$. Тогда для новой неизвестной функции $u(x)$ получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$u'x + u = tgu + u \Rightarrow \frac{du}{dx}x = tgu \Rightarrow \frac{du}{tgu} = \frac{dx}{x}$.

Интегрируя обе части равенства, получаем:

$$\int \frac{cosu}{sinu} du = \int \frac{dx}{x} \ \rightarrow \ ln|sinu| = ln|x| + ln|C| \ \rightarrow \sin u = Cx.$$

Теперь можно вернуться к исходной неизвестной функции $y$: $sin\ (y\ /\ x) = Cx$.

В результате получен ***общий интеграл*** исходного дифференциального уравнения.

***Общее решение*** дифференциального уравнения:

$$\frac{y}{x} = arcsin(Cx) \ \rightarrow \ \ y = xarcsin(Cx).$$

## Упражнения

### Уровень А.

**1.** Решить уравнения:

***a)*** $(x + 2y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y=0$; ***b)*** $(x - y)\mathrm{d}x + (x + y)\mathrm{d}y=0$; ***c)*** $(y^2 - 2xy)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y=0$;
***d)*** $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$; ***e)*** $y^2 + x^2y' = xyy'$; ***f)*** $(x^2 + y^2)y' = 2xy$;
***g)*** $xy' - y = x\cdot\mathrm{tg}\frac{y}{x}$; ***h)*** $xy' = y - x\cdot e^{\frac{y}{x}}$; ***i)*** $xy' - y = (x + y)\ \ln\frac{x+y}{x}$;
***j)*** $xy' = y\ \cos(\ln\frac{y}{x})$; ***k)*** $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$; ***l***) $y' = \frac{y}{x} - 1$;
***m)*** $x^2y' = xy + y^2e^{-\frac{x}{y}}$; ***n)*** $x\cos\frac{y}{x}dy + \left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx = 0$;
***o)*** $(x^2 + 2xy)dx + xy\ dy=0$; ***p)*** $xy'\ \ln\left(\frac{y}{x}\right) = x + y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

***Ответы:***

**a)** $x + y = Cx^2$; $x=0$; ***b*)** $\ln(x^2 + y^2) = C - 2\mathrm{arctg}(y/x)$; ***c*)** $x(y-x)=Cy$; $y=0$;
***d*)** $x = \pm y\sqrt{lnCx}$; $y = 0$; ***e*)** $y = Ce^{\frac{y}{x}}$; ***f*)** $y^2 - x^2 = Cy$; $y = 0$;
**g)** $sin\frac{y}{x} = Cx$; ***h*)** $y = - x\ \ln\ \ln Cx$; ***i*)** $ln\frac{x+y}{x} = Cx$;
***j*)** $\ln\ Cx = \mathrm{ctg}(\frac{1}{2}\ ln\frac{y}{x})$; $y = xe^{2\pi k}$, $k = 0, \mp1, \mp2, \ldots$; ***k*)** $e^{-\frac{y}{x}} + ln|x| = C$;
***l*)** $xe^{\frac{y}{x}} = C$; ***m*)** $e^{\frac{x}{y}} + ln|x| = C$; ***n*)** $\ln|x| + sin\frac{y}{x} = C$;
***o*)** $ln|x + y| + \frac{x}{x+y} = C$; ***p*)** $lnx - \frac{y}{x}\left(ln\frac{y}{x} - 1\right) = C$.

### Уровень В.

**1.** Решить уравнения:

**a)** $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$; ***b*)** $(4y^2 + x^2)\ y'=xy$;
**c)** $xy'\ \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x = y\ \sin\left(\frac{y}{x}\right)$; ***d*)** $xy + y^2 = (2x^2 + xy)\ y'$;

***e***) $(xy+y^2)y' = y^2$; ***f***) $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$; ***g***) $(x^3+xy^2)y' = y^3$;
***h***) $y' = \frac{2x+1}{3y+x+2}$; ***i***) $y' = \frac{x-y+3}{x-y}$; ***j***) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

***Ответы:***

***a***) $\sqrt{\frac{x}{y}} + ln|y| = C$; ***b***) $ln|y| = \frac{x^2}{8y^2} + C$; ***c***) $Cx = e^{cos\left(\frac{y}{x}\right)}$; ***d***) $y^2 = Cxe^{-\frac{y}{x}}$;

***e***) $x = y\ln|y| + Cy,\ y = 0$; ***f***) $\mp x\sqrt{C - 2\ln|x|}$; ***g***) $y = C_1 e^{-\frac{y^2}{2x^2}}, C_1 > 0$;
***h***) $(x+y+1)^2(4x-6y-1)^3 = \mp C_2 = C_3$; ***i***) $y = x \mp \sqrt{C-6x}$;
***j)*** $y = \frac{C}{2}x^2 + \frac{1}{2C},\ y = \mp x$.

### 1.2.3 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида $\frac{dy}{dx} = A(x)\cdot y + B(x)$, (где *A(x)* и *B(x)* – некоторые известные функции) – ***линейное*** дифференциальное уравнение, т.е. вида *y′ =A(x)·y + B(x)*.

*Частные модификации линейного уравнения.*

**a.** Выражение *B(x)* может быть некоторой константой *k* (числом), в этом случае линейное уравнение принимает вид: $y' = A(x)\cdot y + k$.

**b.** Выражение *A(x)* тоже может быть некоторой константой *k,* тогда линейное уравнение принимает вид: $y' = k\cdot y + B(x)$.

**c.** Рядом с производной может находиться множитель *R(x),* зависящий *только от «икс»*: *R(x) y′ =A(x)·y + B(x) =* – это тоже линейное уравнение.

**Метод решения:** существуют два метода решения этого уравнения, которые различаются лишь обозначениями.

**Первый метод *(метод Бернулли):*** Решение линейного дифференциального уравнения *y′ =A(x)·y + B(x)* ищут в виде произведения двух функций *y=u(x)·v(x)*, которые находят по формулам: $u(x) = e^{\int A(x)dx}$ (без произвольной константы).

$v(x) = \int \frac{B(x)}{u(x)}dx$ (с произвольной константы).

**Обоснование:** пусть *y=u(x)·v(x)*, тогда *y′=u′·v+u·v′*, подставим в ДУ, получим *u′·v+u·v′=A(x)·u·v+B(x)* → *v·(u′-A(x)·u)+u·v′=B(x).*

Мы имеем одно дифференциальное уравнение с двумя неизвестными функциями *u(x)* и *v(x)*. Однозначно эти функции найти нельзя. Добавим еще одно условие, а именно, положим равной нулю выражение в скобках в последнем уравнении. Получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u' - A(x)\cdot u = 0, \\ u\cdot v' = B(x) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = A(x)\cdot u \\ u(x)\cdot\dfrac{dv}{dx} = B(x) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \int\dfrac{du}{dx} = \int A(x)dx \\ \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{B(x)}{u(x)} \end{cases}.$$

Возьмем частное решение первого уравнения $u(x) = e^{\int A(x)dx}$и подставим его во второе, получим $v = \int \frac{B(x)}{u(x)} dx$.

**Второй способ** решения линейного ДУ *y′ =A(x)·y + B(x)* **(*метод Лагранжа вариации постоянной*).**

Сначала решим соответствующее линейное однородное ДУ

$$y' = A(x) \cdot y \;\; \leftrightarrow \;\; \frac{dy}{dx} = A(x) \cdot y.$$

Решив это уравнение, получим его общее решение

$$y = C \cdot y_1(x), \text{где } y_1(x) = e^{\int A(x)dx}.$$

Общее решение **неоднородного** линейного дифференциального уравнения $y' = A(x) \cdot y + B(x)$ будем искать в виде $y = C(x) \cdot y_1(x)$, где функцию $C(x)$ надо найти.

Найдем производную $y' = C'(x) \cdot y_1(x) + C(x) \cdot y_1'(x)$ и подставим её в неоднородное ДУ $y' = A(x) \cdot y + B(x)$, получим:

$$C'(x) \cdot y_1(x) + C(x) \cdot y_1'(x) = A(x) \cdot C(x) \cdot y_1(x) + B(x).$$

Поскольку $y_1' = A(x) \cdot y_1 \;\to\; C(x) \cdot y_1' = C(x) \cdot A(x) \cdot y_1$, получим такое уравнение: $C'^{(x)} \cdot y_1(\mathrm{x}) = \mathrm{B}(x)$, из которого находим $\mathrm{C}'(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{B}(\mathrm{x})}{\mathrm{y}_1(\mathrm{x})}$, интегрируя которого находим $C(x)$ (при этом возникает настоящая произвольная постоянная).

Понятно, что эти два метода различаются лишь обозначениями:

$$u(x) = y_1(x),\; v(x) = C(x).$$

**Пример 1.**

Решить дифференциальное уравнение: $\boldsymbol{y' - y = e^x}$.

***Решение.***

Данное уравнение является линейным и имеет простейший вид:

$$y' - y = B(x).$$

Рассмотрим метод подстановки. Замена: $y=uv$, где $u$ и $v$ – некоторые, пока ещё неизвестные функции, зависящие от «икс».

Подставляем $y=uv$ и $y'=u' \cdot v+u \cdot v'$ в наше уравнение

$$y' - y = e^x\text{:}\; u'v + uv' - uv = e^x.$$

Уравнения записываем в систему: $\begin{cases} v' - v = 0, \\ u'v = e^x. \end{cases}$

Сначала из первого уравнения находим функцию $v$. Это простейшее уравнение с разделяющимися переменными.

$$v' - v = 0 \quad \to \quad \frac{dv}{dx} = v \quad \to \quad \int \frac{dv}{v} = \int dx \quad \to \quad ln|v| = x \quad \to \quad v = e^x.$$

Функция $v$ найдена. Константу $C$ на данном этапе мы <u>не приписываем</u>.

Далее подставляем найденную функцию $v = e^x$ во второе уравнение системы: $u'v = e^x$:$u' \cdot e^x = e^x$.

Из второго уравнения находим функцию *u*:

$$u' = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 1 \quad \rightarrow \quad u = \int dx = x + C.$$

Записываем общее решение: $y = uv = (x + C)e^{x},$ где $C = const$.

***Ответ:*** общее решение $y = uv = (x + C)e^{x},$ где $C = const$.

**Пример 2.**

Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' + y \cdot tgx = \frac{1}{cosx}$.

***Решение.***

Данное уравнение является линейным неоднородным, проведем:

$$u'v + uv' + uvtgx = \frac{1}{cosx} \quad \rightarrow \quad u'v + u(v' + vtgx) = \frac{1}{cosx}.$$

Составим и решим систему: $\begin{cases} v' + vtgx = 0\,, \\ u'v = \frac{1}{cosx} \end{cases}.$

Из первого уравнения найдем *v:*

$$\frac{dv}{dx} = -v \cdot \frac{sinx}{cosx} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{sinx}{cosx}dx \quad \rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{d(cosx)}{cosx} \quad \rightarrow$$

$$ln|v| = ln|cosx|.$$

$v = \cos x$ – подставим во второе уравнение системы:

$$u'cosx = \frac{1}{cosx} \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{cos^2x} \quad \rightarrow \quad u = \int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + C.$$

Таким образом: $y = uv = (tgx + C) \cdot cosx = \left(\frac{sinx}{cosx} + C\right) \cdot cosx.$

***Ответ:*** общее решение: $y = Ccosx + sinx,$ где $C = const$.

## Упражнения

**Уровень А.**

**1.** Найти общее решение дифференциального уравнения:

***a***) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; ***b***) $y' - 4y = 2e^{3x}$; ***c***) $y' + yctgx = cosx$;
***d***) $3x^2(x^3 + y)dx = dy$; ***e***) $y' + 2y\sin 2x = \sin x\cos x$;
***f***) $y' - y - xe^{x} = 0$; ***g***) $xy' = y + 2x^3$;
***h***) $y' - 2y = x$; ***i***) $x^2y' + xy + 2 = 0$.

***Ответы:***

$\boldsymbol{a}$) $y=\left(\frac{x^2}{2}+C\right)\cdot e^{-x^2}$ ; $\boldsymbol{b}$) $y=Ce^{4x}-2e^{3x}$; $\boldsymbol{c}$) $y=\frac{C}{sinx}+\frac{sinx}{2}$;
$\boldsymbol{d}$) $y=-x^3-1+e^{x^3}$; $\boldsymbol{e}$) $y=\frac{1}{4}+Ce^{cos2x}$; $\boldsymbol{f}$) $y=e^x\left(\frac{x^2}{2}+C\right)$;
$\boldsymbol{g}$) $y=x^3+C_1x$; $\boldsymbol{h}$) $-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}(1+2x)+Ce^{2x}$; $\boldsymbol{i}$) $y=-\frac{2\ln|x|}{x}+\frac{C}{x}$.

**2.** Решить задачу Коши.

$\boldsymbol{a}$) $y'+\frac{y}{x}-2e^{x^2}=0,\ y(1)=e$; $\boldsymbol{b}$) $y'-ytgx=sinx, y(0)=1$;
$\boldsymbol{c}$) $(x+y^2)dy=ydx, \quad y(0)=2$; $\boldsymbol{d}$) $y'+5y=2e^{-3x}, y(0)=2$;
$\boldsymbol{e}$) $y'+\frac{3}{x}y=\frac{2}{x^2}$ , $y(1)=2$.

***Ответы:***

$\boldsymbol{a}$) $y=\frac{e^{x^2}}{x}$; $\boldsymbol{b}$) $y=\frac{1}{3cosx}(4-cos2x)$; $\boldsymbol{c}$) $x=y^2-2y$;
$\boldsymbol{d}$) $y=e^{-3x}+e^{-5x}$; $\boldsymbol{e}$) $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}$.

**Уровень В.**

**1.** Найти общее решение дифференциального уравнения.

***a***) $(4x\text{-}y^4)y'=2y$; ***b***) $(3y+1)dx=(5y+3x)dy$;
***c***) $(xy'-ln^2x)lnx=3y$; $\boldsymbol{d}$) $(x+2)dy=(3y+2(x+2)^5)dx$;
***e***) $y^3y'-x^2y^4=x^2$; $\boldsymbol{f}$) $y'-3x^2y=x^2y^4$;
$\boldsymbol{g}$) $dy\big(x+x^3(y+2)\big)=(y+2)dx$; $\boldsymbol{h}$) $y'-6xy=6x\sqrt[3]{y^2}$;
$\boldsymbol{i}$) $2y'=y^3(x^2-1)cosx-\frac{y}{x-1}$; $\boldsymbol{j}$) $(x^4+e^{-2y})=4x^3$;
$\boldsymbol{k}$) $(\boldsymbol{y^2}-1)dx-y\big[x+(y^2-1)\sqrt{x}\big]dy=0$.

***Ответы:***

$\boldsymbol{a}$) $x=-\frac{1}{4}y^4+Cy^2, y=0$;
$\boldsymbol{b}$) $x=\frac{5}{9}(3y+1)\ln|3y+1|+\frac{5}{9}+C(3y+1),\ 3y+1=0$;
**c**) $y=\ln|\ln x|\cdot\ln^3x+C\ln^3x$; $\boldsymbol{d}$) $y=(x+2)^5+C(x+2)^3,\ x=-2$;
$\boldsymbol{e}$) $y^4=Ce^{\frac{4}{3}x^3}-1$; $\boldsymbol{f}$) $y^{-3}=Ce^{-3x^3}-\frac{1}{3}, \quad y=0$;
$\boldsymbol{g}$) $\frac{1}{x^2}=\frac{C}{(y+2)^2}-\frac{2}{3}(y+2), y=-2,\ x=0$; $\boldsymbol{h}$) $y=\left(Ce^{x^2}-1\right)^3, y=0$;
***i***) $\frac{1}{y^2}=-(x^2-1)\sin x-(x-1)\cos x+C(x-1),\ y=0$;
$\boldsymbol{j}$) $x^4=-\frac{1}{3}e^{-2y}+Ce^y$; $\boldsymbol{k}$) $3\sqrt{x}=y^2-1+C|y^2-1|^{\frac{1}{4}},\ x=0,\ y=\mp1$.

***2.*** Решить задачу Коши: $\frac{3xy'}{4\sqrt[4]{y}} - 3\sqrt[4]{y^3} = 2x,\ y(1) = 0.$

***Ответ:*** Частное решение: $\sqrt[4]{y^3} = -x + x^3.$

**3.** Найти интегральную кривую уравнения: $ydx - 4(x + y^2\sqrt{x})dy = 0,$ проходящую через точку $(0, 1)$.

***Ответ:*** $x = 4y^4 ln^2 y.$

**4.** Найти интегральную кривую уравнения: $dx - xy(1 + xy^2)dy = 0,$ пересекающую биссектрисы обоих координатных углов при $x = 1$.

***Ответ:*** $x(2 - y^2) = 1.$

**5.** Найти решение уравнения $x(y'sinx - ycosx) = y^2 cosx,$ удовлетворяющее условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

***Ответ:*** $y = sin^2 x.$

**6.** Найти решение уравнения $cos^2 x(y'cosx + y\ sinx) + y^2 sinx = 0,$ удовлетворяющее условию $y(0) = 1$.

***Ответ:*** $y = cos^2 x.$

## 1.3 Классификация дифференциальных уравнений.

***Цель обучения:*** классифицировать дифференциальные уравнения: с разделяющимися переменными, однородные, линейные уравнения первого порядка.

### Упражнения

**Уровень А.**

**1.** Распределите следующие дифференциальные уравнения (номера могут повторяться):

$a)\ y' = x + 3;\quad b)\ y' - 4y = 2x;\quad c)\ y' = \frac{x + 2y}{3x};\quad d)\ y' = (2x + 1) \cdot x;$

$e)\ (x + 1)dy = (4y - 3)dx;\quad f)\ e^{2x}\mathrm{sin}y dy = (x - 1)dx;\quad g)\ y' = \frac{x+2y}{3x-y};$

$h)\ x^2 y' = x^2 + 3xy;\quad i)\ y' - x^2 - 4xy = 0;\quad j)\ y'\mathrm{sin}x = \frac{y}{\mathrm{ln}y}.$

| ДУ с разделяющимися переменными | Однородные ДУ | Линейные ДУ первого порядка |
|---|---|---|
| | | |

***Ответ:***

| ДУ с разделяющимися переменными | Однородные ДУ | Линейные ДУ первого порядка |
|---|---|---|
| $a)\ y' = x + 3;$<br>$d)\ y' = (2x + 1)\cdot x;$<br>$e)(x + 1)dy = (4 - 3)dx;$<br>$f)e^{2x}\sin y dy = (x - 1)dx;$<br>$j)\ y'\sin x = \frac{y}{\ln y}.$ | $c)\ y' = \frac{x + 2y}{3x};$<br>$g)\ y' = \frac{x+2y}{3x-y};$<br>$h)\ x^2y' = x^2 + 3xy.$ | $b)\ y' - 4y = 2x;$<br>$c)\ y' = \frac{x + 2y}{3x};$<br>$h)\ x^2y' = x^2 + 3xy;$<br>$i)\ y' - x^2 - 4xy = 0.$ |

**2.** Найдите решение дифференциального уравнения:

***a)*** *(x + 1)dy = ydx;*
***b)*** $y' + y = 0;$
***c)*** $y' + y = e^x;$
***d)*** $y' = 3^{2x-3y};$
***e)*** $(x^2 + 4)y' = 2xy;$
***f)*** $xy' = y + 2x^3;$
***g)*** $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0;$
***h)*** $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0;$
***i)*** $(1 + e^x)yy' = e^x;$
***j)*** $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1+y^2} = 0.$

***Ответы:***

**a)** $y(x) = C(x + 1);$ ***b)*** $y(x) = Ce^{-x};$ ***c)*** $y(x) = \frac{e^x}{2} + Ce^{-x};$
***d)*** $2\cdot 27^y = 3^{2x+1} + C;$ ***e)*** $y(x) = C(x^2 + 4);$ ***f)*** $y(x)=(x^2 + C)x;$
***g)*** $(1 + y)(1 - x) = C;$ ***h)*** $arctgx + arctgy = C;$
***i)*** $\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C;$ ***j)*** $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = C.$

**3.** Найдите частное решение дифференциального уравнения:
$(1 + x^2)y' + 4xy = \frac{2}{1+x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

***Ответ:*** $y = \frac{2x+1}{(1+x^2)^2}$.

**4.** Найдите частное решение дифференциального уравнения:
$e^{y-x^2}dy - 2xdx = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \ln 2$.

***Ответ:*** $y = \ln\left(e^{x^2} + 1\right)$.

**5.** Найдите частное решение дифференциального уравнения:
$y' + \frac{y}{x} - 2e^{x^2} = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = e$.

***Ответ:*** $y = \frac{e^{x^2}}{x}$.

**6.** Найти решение задачи Коши: $y' - \frac{2y}{x+1} = (x + 1)^3$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

***Ответ:*** $y = \frac{(x+1)^4}{2}$.

**7.** Найти решение задачи Коши: $xy' + 3y = \frac{2}{x(1+x^2)}$, $y(-1) = 0$.

***Ответ:*** $y = \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right)$.

**Уровень В.**

**1.** Определите вид дифференциального уравнения. Найдите общее решение (общий интеграл).

***a***) $(x^2+3)dy + y\sqrt{x^2+3}dx = xydx$;
***b***) $x(dx - dy) = y(dy + dx)$;
***c***) $x(y'-1) + y = 2xlnx$;
***d***) $y' = \sqrt{2x+3y}$;
***e***) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy} = 0$;
***f***) $y' = \frac{x+3y+4}{3x-6}$;
***g***) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

***Ответы:***

**a)** $y = C_1\frac{\sqrt{x^2+3}}{x+\sqrt{x^2+3}}$; ***b***) $y^2 + 2xy - x^2 = C$; ***c***) $y = x\ln x + \frac{C}{x}$;
***d***) $\frac{2}{3}\sqrt{2x+3y} - \frac{4}{9}\ln\left|\sqrt{2x+3y} + \frac{2}{3}\right| = x + C$; **e)** $x^2(x^2+2y^2) = C$;
***f***) $\frac{y+2}{x-2} = \frac{ln|x-2|}{3} + C$; ***g***) $y + \sqrt{y^2-x^2} = Cx^2$, $y = \mp x$.

**2**. Найдите решение задачи Коши.

***a)*** $y' + (ctgx)y = cosx$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;
***b)*** $y' + \frac{1}{x}y = \frac{2}{x^2} + 1$, $y(-1) = 0$;
***c)*** $(x+2)y' + 4y = \frac{1+2x^2}{x(x+2)^3}$, $y(-1) = 2$;
***d***) $(x^2-1)y' - 2xy = x(x^2-1), y(0) = 4$;
***e***) $(x^2-5)y' - 2xy = -2x(x^2-5)$, $y(2) = 7$.

***Ответы:***

***a***)$y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$; ***b***) $y = \frac{2ln|x|}{x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$;
***c***) $y = \frac{\ln|x| + x^2 + 1}{(x+2)^4}$; ***d***) $y = (x^2-1)\left(\frac{1}{2}\ln|x^2-1| - 4\right)$;
***e***) $y = -(x^2-5)(7 + ln|x^2-5|$.

## Раздел 2. Задачи, сводящиеся к решению дифференциальных уравнений

В качестве математических моделей реальных процессов могут быть использованы дифференциальные уравнения. Ведь часто при изучении многих процессов, протекающих в природе, бывает довольно сложно установить зависимость между функциями, характеризующими те или иные величины. Но зато в некоторых случаях возможно установить связь между теми же функциями и их производными. Это приводит к уравнениям, содержащим неизвестные функции под знаком производной, т.е. к дифференциальным уравнениям (с их помощью процесс может быть описан проще и полнее). Производная характеризует скорость изменения функции по отношению к изменению независимой переменной. В геометрии производная характеризует крутизну графика, в механике – скорость неравномерного прямолинейного движения, в биологии – скорость размножения колонии микроорганизмов, в экономике – отзывчивость производственной функции (выход продукта на единицу затрат), в химии – скорость химической реакции.

Эти задачи не совсем обычны как по форме изложения, так и по применяемым методам решения.

### 2.1 Методы решения и исследования некоторых задач, решаемых с помощью дифференциальных уравнений.

***Цель обучения:***

Составлять и решать дифференциальные уравнения в несложных случаях.
Интерпретировать решения дифференциального уравнения в контексте задачи, смоделированной уравнением.

**Методика составления и решения прикладных задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений**

Составление дифференциального уравнения по условию задачи (механической, физической, химической или технической) состоит в определении математической зависимости между переменными величинами и их приращениями.

Исчерпывающих правил для составления дифференциальных уравнений нет. В большинстве случаев методика решения технических задач с применением теории обыкновенных дифференциальных уравнений сводится к следующему:

- Подробный разбор условий задачи и составление чертежа, поясняющего ее суть.
- Составление дифференциального уравнения рассматриваемого процесса.
- Интегрирование составленного дифференциального уравнения и определение общего решения этого уравнения.
- Определение частного решения задачи на основании данных начальных условий.

- Определение, по мере необходимости, вспомогательных параметров (например, коэффициента пропорциональности и др.), используя для этой цели дополнительные условия задачи.
- Вывод общего закона рассматриваемого процесса и числовое определение искомых величин.
- Анализ ответа и проверка исходного положения задачи.

Некоторые из этих рекомендаций в зависимости от характера задачи могут отсутствовать.

Рассмотрим процесс решения следующих задач:

### 2.1.1 Задачи на теплообмен.

**Задача 1.**

Температура вынутого из печи хлеба в течение 20 мин. падает от $100^0$ до $60^0$ (рис.1). Температура воздуха равна $25^0$. Через сколько времени от момента начала охлаждения температура хлеба понизится до $30^0$?

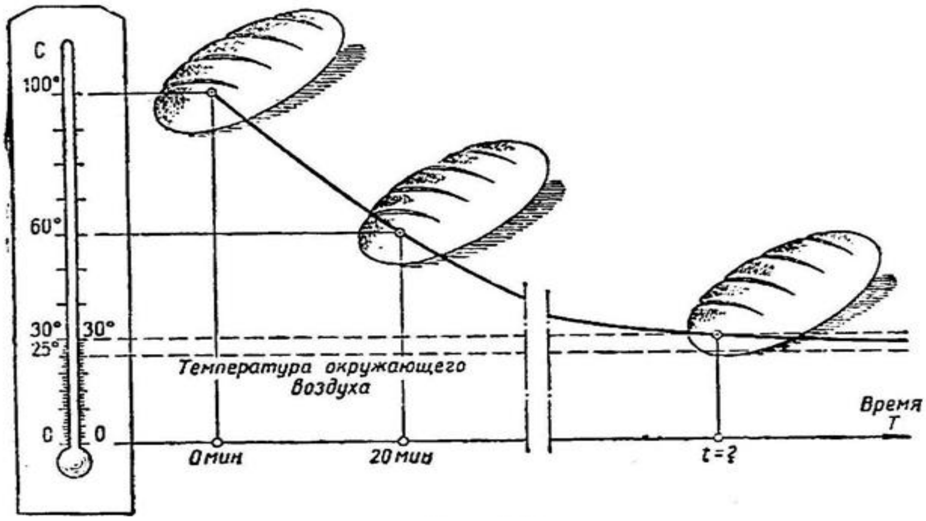



Рис.1

***Решение.***

В силу закона Ньютона скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Это – процесс неравномерный. С изменением разности температур в течение процесса меняется также и скорость охлаждения тела.

Пусть $\tau$ – время охлаждения, тогда дифференциальное уравнение охлаждения хлеба будет: $\frac{dT}{d\tau}= k(T-t),$ где $T$ - температура хлеба; $t$ - температура окружающего воздуха (в нашем случае $25^0$); $k-$коэффициент пропорциональности; $\frac{dT}{d\tau}$ - скорость охлаждения хлеба.

Разделяя переменные, получим: $\frac{dT}{T-t} = kd\tau \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{T-25} = kd\tau$

Интегрируя, получаем: $\int \frac{dT}{T-25} = \int k d\tau, \quad \rightarrow \quad \ln|T-25| = k\tau + \ln C$

Потенцируя обе части последнего равенства, имеем: $e^{\ln|T-25|} = e^{k\tau} e^{\ln c}$. Так как $e^{k\tau} = N$, то окончательно $T - 25 = Ce^{k\tau}$. Произвольную постоянную $C$ определяем, исходя из начального условия: при $\tau = 0$ мин, $T=100^o$. Отсюда $100 - 25 = Ce^{k\cdot 0} = C \quad \rightarrow \quad C = 75$. Величину $e^k$определяем, исходя из данного дополнительного условия: при $\tau = 20$ мин, $T=60^o$.

Получаем: $60 - 25 = 75(e^k)^{20} \quad \rightarrow \quad e^k = \left(\frac{35}{75}\right)^{\frac{1}{20}} = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}$

Таким образом, уравнение охлаждения хлеба при условиях нашей задачи примет вид: $T = 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}} + 25$. Из этого уравнения легко определяем искомое время $\tau$ при температуре хлеба Т=30°: $\frac{1}{15} = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}\tau}$. Окончательно находим: $\tau = \frac{-20ln15}{ln7 - ln15} \approx 71$ мин. Итак, после 1 часа 11 минут хлеб охлаждается до температуры 30°С.

***Ответ****: через 1 час 11 минут*

**Задача 2.**

За какое время тело, нагретое до 100 градусов, в комнате с температурой 20 градусов охладится до 25 градусов если до 60 градусов оно охладилось за 20 минут?

***Решение.***

В условии задачи переменными являются время и температура тела. При этом время $t$ – независимая переменная (в часах), а температура $T(t)$°С – функция (в градусах Цельсия).

Используем физический закон: скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и среды.

Выделим начальное условие: при $t_0$=0 мин температура тела $T_0$=100°С. Для нахождения коэффициента пропорциональности даны дополнительные условия: $t_1$=20 мин, $T_1$=60$^0$С. Вопрос задачи: найти время $t_2$, если $T_2$=25$^0$С.

Исходя из физического смыла производной, скорость изменения температуры есть производная от температуры тела по времени - $\frac{dT}{dt}$.

По физическому закону запишем уравнение: $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$.

Найдем общее решение: $\int \frac{dT}{T-20} = \int k dt, \Leftrightarrow \ln(T - 20) = kt + C,$ $T - 20 = Ce^{kt} -$ общее решение. $T = 20 + Ce^{kt}$. Подставим начальные условия: $100 = 20 + Ce^{k\cdot 0}$, откуда $C$=80.

Запишем частное решение: $T = 20 + Ce^{kt}$.

Для нахождения коэффициента $k$ подставим дополнительные данные: $60 = 20 + 80e^{20k}, e^{20k} = \frac{1}{2},\ 20k = -ln2,\ k = -\frac{ln2}{20}$.

Тогда решение уравнения запишется в виде: $T = 20 + Ce^{-\frac{t\,ln2}{20}}$.
Найдем $t$ при условии $T = 25$.

$$25 = 20 + 80e^{-\frac{t\,ln2}{20}},\ e^{-\frac{t\,ln2}{20}} = \frac{1}{16},\ \Rightarrow -\frac{t\ln 2}{20} = -4\ln 2,\ \Rightarrow t = 80 \text{ мин.}$$

***Ответ:*** 80 минут.

**Задача 3.**

Трубопровод тепловой магистрали (диаметр 20 см) защищен изоляцией толщиной 10 см; величина коэффициента теплопроводности k =1,00017. Температура трубы $160^0$; температура внешнего покрова $30^0$. Найти распределение температуры внутри изоляции, а также количество теплоты, отдаваемого одним погонным метром трубы.

***Решение.***

Если тело находится в стационарном тепловом состоянии и температура $T$ в каждой его точке есть функция только одной координаты $x$, то согласно закону теплопроводности Фурье количество теплоты, испускаемое в секунду: $Q = -kF(x)\frac{dT}{dx} = const$, где F(x)- площадь сечения тела на расстоянии *x, k* – коэффициент теплопроводности.

Здесь $F(x) = 2\pi xL$, где $L$ – длина трубы в см, $x$ – радиус трубопровода в см. Таким образом, после разделения переменных дифференциальное уравнение примет вид: $dT = -\frac{Q}{kF(x)}dx = -\frac{Q}{k2\pi L}\frac{dx}{x}$

Интегрируя обе части равенства, находим: $\begin{cases} \int_{160}^{30} dT = -\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi L}\int_{10}^{20}\frac{dx}{x}; \\ \int_{160}^{T} dT = -\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi L}\int_{10}^{20}\frac{dx}{x}; \end{cases}$

или $\begin{cases} T\Big|_{160}^{30} = 30 - 160 = -\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi L} lnx\Big|_{10}^{20} = -\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi L} ln2 \\ T\Big|_{160}^{T} = T - 160 = -\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi L} lnx\Big|_{10}^{x} = -\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi L} ln0{,}1x \end{cases}$

Разделив почленно уравнения второе на первое, получим:

$$\frac{T - 160}{-130} = \frac{ln0{,}1x}{ln2} = \frac{lg0{,}1x}{lg2}$$

Отсюда закон распределения температуры внутри изоляции:

$$T = 591{,}8 - 431{,}8 \cdot lgx$$

Из первого уравнения системы при $L$=100 см имеем:

$$Q = \frac{130\cdot 0{,}00017\cdot 2\pi\cdot 100}{ln2} = \frac{200\pi\cdot 130\cdot 0{,}00017}{0{,}69315}$$

Количество теплоты, отдаваемое в течение суток, равно

$$24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot Q = 86400\frac{200\pi \cdot 130 \cdot 0{,}00017}{0{,}69315} = 1730600 \text{ кал.}$$

***Ответ:*** $Q$=1730600 кал.

### 2.1.2 Задачи на смеси.

**Задача 4.**
Сосуд объемом 20 литров содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд втекает 0,1 литров азота в секунду, который непрерывно перемешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через какое время в сосуде будет 99% азота? (При решении задачи считать, что втекающий азот вследствие перемешивания распределяется по объему сосуда равномерно.)

***Решение.***
Примем за независимую переменную время $t$, а за искомую функцию $V(t)$ – объем азота в сосуде (в литрах).

Тогда за промежуток времени $\Delta t$ количество азота в сосуде изменится на $\Delta V = V(t+\Delta t) - V(t)$. С другой стороны, за время $\Delta t$ в сосуд попадет $0{,}1\Delta t$ литров азота, через то же время в сосуде окажется $V(t) + \alpha(t)$ литров азота, то есть один литр сосуда содержит $\frac{V(t)+\alpha(t)}{20}$ литров азота, а вытечет за это время $0{,}1\ \frac{V(t)+\alpha(t)}{20}\Delta t$ литров азота (функция $\alpha(t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$).

Таким образом, за время $\Delta t$ содержание азота в сосуде изменится на

$$\Delta V = 0{,}1\Delta t - 0{,}1\,\frac{V(t)+\alpha(t)}{20}\Delta t \text{ литров.}$$

Перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим уравнение с разделяющимися переменными: $dV = 0{,}1dt - \frac{V}{200}dt.$

Решая это уравнение, получим функцию $V = Ce^{-\frac{t}{200}} + 20.$
Теперь, используя условие, что в момент времени $t = 0$ в сосуде находилось $V = 20\cdot 0{,}8 = 16$ литров азота, вычислим константу $C$: $16 = C + 20,\ C = -4$.

Таким образом, мы получили уравнение зависимости объема азота в сосуде от времени: $V(t) = 20 - 4\,e^{-\frac{t}{200}}$.

Теперь, используя это уравнение, можем вычислить время, через которое в сосуде окажется 99% азота, так как 99% азота составляют $V = 20 \cdot 0{,}99 = 19{,}8$ л. Подставив это значение в выражение для $V(t)$, вычислим $t$:

$$19{,}8 = 20 - 4e^{-\frac{t}{200}}, \quad 4e^{-\frac{t}{200}} = 0{,}2, \qquad e^{-\frac{1}{200}} = 0{,}05.$$

Потенцируя, находим $t = -200 \cdot \ln 0{,}05 = -2{,}99\cdot(-200)=598$ с. Полученное время есть искомое время заполнения сосуда азотом на 99%.

***Ответ:*** *t=598 с*

**Задача 5.**
В баке содержится 100 л раствора, содержащего 20 кг соли. Вода

вливается со скоростью 3 л/мин, а смесь выливается со скоростью 2 л/мин. Сколько соли останется в баке через час?

**Решение.**

Пусть $t$ – время (в мин), независимая переменная, $x(t)$ – количество соли в баке в момент времени $t$.

Начальные условия: $v_0 = 100л;\ t_0 = 0;\ x_0 = 20кг$.

Дополнительные условия: вода вливается со скоростью 3 *л/мин*, а смесь выливается со скоростью 2 *л/мин*.

Вопрос задачи: $t = 60$ *мин*, $x$ - ?

Изменение количества соли происходит за счет вытекающей смеси, в 1 *л* которой содержится $\frac{x}{100+t}$ , так как объем смеси в сосуде увеличивается на 1 *л/мин.*

Составим уравнение: $dx = -\frac{2xdt}{100+t}$, так как выливается 2 *л* смеси. Решим получившееся уравнение с разделяющимися переменными.

$$dx = -\frac{2xdt}{100+t},\ \int\frac{dx}{x} = -2\int\frac{dt}{t+100}.$$

$$ln|x| = -2ln|100+t| + lnC. \quad \rightarrow \quad x = \frac{C}{(100+t)^2}.$$

$$t_0 = 0, x_0 = 20 \quad \rightarrow \quad 20 = \frac{C}{100^2},\quad C = 2\cdot 10^5.$$

$$x = \frac{2\cdot 10^5}{(100+t)^2} = 2\frac{10^5}{16\cdot 16} = \frac{500}{64} \approx 7{,}8\ (кг).$$

***Ответ***: x≈ 7,8 (кг).

**Задача 6.**

На нефтеперерабатывающем заводе в резервуаре для хранения содержится 2000 галлонов бензина, в котором изначально растворено 100 фунтов присадки (Присадка — препарат, который добавляется к топливу, смазочным материалам и другим веществам в небольших количествах для улучшения их эксплуатационных свойств). Для подготовки к зимней погоде, бензин содержащий, 2 фунта добавки на галлон закачивается в бак со скоростью 40 галлонов мин. Затем хорошо перемешанный раствор откачивается со скоростью 45 галлонов в мин. Сколько добавки находится в баке через 20 минут после начала процесса откачки (рис. 2)?

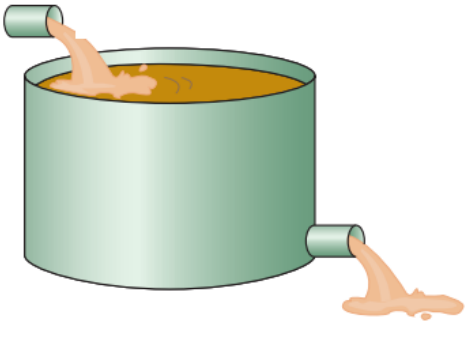


Рис.2.

**Решение.**

Пусть y будет количество (в фунтах) добавки в баке в момент времени $t$. Мы знаем, что $y = 100$, при $t = 0$.

$V(t) = 2000\, gal + \left(40\,\frac{gal}{min} - 45\,\frac{gal}{min}\right) t(min) = (2000 - 5t) gal.$

$\frac{y(t)}{V(t)} \cdot$ скорость откачивания $= \left(\frac{y}{2000-5t}\right) \cdot 45 = \frac{45y}{2000-5t}\,\frac{lb(\text{фут})}{min}.$

$$\left(2\,\frac{lb(\text{фут})}{min}\right) \cdot \left(40\,\frac{gal}{min}\right) = 80\,\frac{lb(\text{фут})}{min}; \quad \frac{dy}{dt} = 80 - \frac{45y}{2000-5t}, \quad \frac{dy}{dt} + \frac{45}{2000-5t} y = 80$$

$P(t) = \frac{45}{2000-5t}$, $Q(t) = 80$.

$v(t) = e^{\int P dt} = e^{\int \frac{45y}{2000-5t} dt} = e^{-9\ln(2000-5t)} = (2000-5t)^{-9}.$

$(2000-5t)^{-9} \cdot \left(\frac{dy}{dt} + \frac{45}{2000-5t} y\right) = 80 \cdot (2000-5t)^{-9},$

$$\frac{d}{dt}[(2000-5t)^{-9} y] = 80(2000-5t)^{-9},$$

$$(2000-5t)^{-9} y = \int 80(2000-5t)^{-9} dt,$$

$$(2000-5t)^{-9} y = 80 \cdot \frac{(2000-5t)^{-8}}{(-8)(-5)} + C.$$

$$y = 2(2000-5t) + C(2000-5t)^9.$$

Так как $y = 100$, при $t = 0$, $y = 2(2000-0) + C(2000-0)^9$,

$$\mathrm{C} = -\frac{3900}{(2000)^9}.$$

$$y = 2(2000-5t) - \frac{3900}{(2000)^9}(2000-5t)^9.$$

$$y(20) = 2\big(2000 - 5(20)\big) - \frac{3900}{(2000)^9}\big(2000 - 5(20)\big)^9 \approx 1342\, lb(\text{фут}).$$

***Ответ:*** $1342\, lb(\text{фут})$

### 2.1.3 Задачи на радиоактивный распад.

**Задача 7.**

Какое количество радиоактивного вещества останется через 100 лет, если период полураспада равен 1600 годам?

***Решение.***

Пусть *t* – время (в годах), независимая переменная, *x(t)* – количество радиоактивного вещества в момент времени *t.*

*Закон:* скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна наличному количеству вещества.

Составляем уравнение: $\frac{dx}{dt} = kx$.

Начальные условия: $t_0 = 0$; $x_0 = m$.

Дополнительные условия: $t_1 = 1600$ лет; $x_1 = \frac{m}{2}$.

Вопрос задачи: $t$ =100 лет, $x$ -?

Решим уравнение:

$\frac{dx}{x} = k\,dt$, $\int \frac{dx}{x} = kt$, $\ln|x| = kt + lnC$, $x = Ce^{kt}$ – общее решение.

$t_0 = 0$; $x_0 = m$. $m = Ce^0$, $C = m$, $x = me^{kt}$ – частное решение.

При $t_1 = 1600$; $x_1 = \frac{m}{2}$. Откуда $\frac{m}{2} = me^{1600k}$, $\frac{1}{2} = e^{1600k}$.

$1600k$ = - ln2, $k$ = -$\frac{\ln 2}{1600}$. Тогда $x = me^{-\frac{t\ln 2}{1600}}$. При $t$ = 100 $x = me^{-\frac{\ln 2}{16}}$.

$$\frac{x}{m} = e^{-0{,}04} = \frac{1}{1{,}04} = 0{,}96.$$

***Ответ:*** ≈ 0,96

**Задача 8.**

За 30 дней распалось 50% первоначального числа атомов радиоактивного вещества. Через сколько дней останется 1% от первоначального числа атомов?

***Решение.***

Воспользуемся законом радиоактивного распада: количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющегося в рассматриваемый момент. Пусть $Q(t)$ количество радиоактивного вещества в момент времени $t$ после начала распада. Тогда, в соответствии с законом радиоактивного распада, имеем $q(t) = kQ(t)$, где $k$ - коэффициент пропорциональности, $q(t)$ - количество вещества, распадающегося за единицу времени.

Следовательно, за промежуток времени от $t$ до $t + \Delta t$ распадется $kQ(t_1)\Delta t$ вещества, где $t_1 \in (t, t + \Delta T), Q_1(t_1)$ - некоторое промежуточное значение количества вещества между $Q(t)$ и $Q(t + \Delta t)$. С другой стороны, это же количество равно $Q(t + \Delta t) - Q(t)$, поэтому окончательно имеем $Q(t + \Delta t) - Q(t) = kQ(t_1)\Delta t$, или $\frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = kQ(t_1)$. Считая функцию $Q$ дифференцируемой и переходя к пределу в последнем соотношении при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение $\frac{dQ(t)}{dt} = kQ(t)$, решением которого является функция $Q(t) = Ce^{kt}$. Очевидно, постоянная $C$ здесь означает первоначальное количество вещества. Далее, из условия $0{,}5C = Ce^{30k}$ находим $k = -\frac{1}{30}\ln 2$, а из условия $0{,}01C = Ce^{-\frac{t}{30}\ln 2}$ получаем $t_1 = \frac{\ln 100}{ln 2} \cdot 30 \approx 200$ (дней)

***Ответ:*** 200 дней.

**Задача 9.**

Найти период полураспада радиоактивного вещества, если за 2 часа распадается 0,1 часть вещества.

***Решение.***

Пусть *t* – время (час), независимая переменная, *x(t)* – количество радиоактивного вещества в момент времени *t.*

*Закон:* скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна наличному количеству вещества.

Составляем уравнение: $\frac{dx}{dt} = kx.$

Начальные условия: $t_0 = 0;\ x_0 = m.$

Дополнительные условия: $t_1 = 2$ ч; $x_1 = 0{,}9\,m.$

Вопрос задачи: $x = \frac{m}{2}$, $t$ -?

Решим уравнение: $\frac{dx}{dt} = kx, \quad \int \frac{dx}{x} = k\int dx, \quad \ln|x| = kt + \ln C,$

$$x = Ce^{kt} - \text{общее решение.}$$

$t_0 = 0,\ x_0 = m,\ \Rightarrow\ \ m = Ce^0,\ \ C = m,\ x = me^{kt}$- частное решение.

При $t_1 = 2$, $x_1 = 0{,}9m$. Откуда $0{,}9m = me^{kt}, \quad 0{,}9 = e^{2k},\ \ 2k = -\ln 0{,}9, k = -\frac{\ln 0{,}9}{2}.$

Тогда $x = me^{\frac{-t\ln 0{,}9}{2}},\ \ x = \frac{m}{2},\ \ \frac{m}{2} = me^{\frac{-t\ln 0{,}9}{2}},\ -\ln 2 = -\frac{t\ln 0{,}9}{2},\ \ \ln 4 = t\ln 0{,}9,$

$$t = \frac{\ln 4}{ln 0{,}9} = 13{,}9\ (\text{час.}).$$

***Ответ:*** $t = 13{,}9$ (час.).

## 2.1.4 Задачи на химические реакции.

Химическое уравнение показывает, как в процессе взаимодействия одних веществ образуется другое вещество. Так, например, уравнение $2H_2 + O_2 \rightarrow 2\ H_2O$

Показывает, что в результате взаимодействия двух молекул водорода и одной молекулы кислорода получаются 2 молекулы воды.

Одним из основных законов теории скоростей химических реакций является закон действующих масс, согласно которому скорость химической реакции при постоянной температуре пропорциональна произведению концентраций веществ, участвующих в данный момент в реакции.

**Задача 10.**

Вещество *A* превращается в вещество *B*. Спустя 1 ч после начала реакции осталось 44,8 г вещества *A,* а после 3 ч осталось 11,2 г вещества. Определить первоначальное количество *a* вещества *A* и время, когда останется половина этого вещества.

***Решение.***

Здесь имеет место реакция первого порядка. Поэтому дифференциальное уравнение реакции $x' = k(a - x)$ и, значит, как установлено выше, $x = a(1 - e^{-kt})$.

Используя дополнительные условия ($x = a - 44,8$ при $t=1$, $x = a - 11,2$ при $t=3$), имеем: $a - 44{,}8 = a(1 - e^{-k})$, $a - 11{,}2 = a(1 - e^{-3k})$

или $\begin{cases} 44{,}8 = ae^{-k}, \\ 11{,}2 = ae^{-3k}. \end{cases}$

Из последней системы находим $e^{-k} = 2^{-1}$, $a = 89{,}6$. Теперь находим искомое время. Имеем: $\frac{a}{2} = a(1 - 2^{-t})$. Откуда $\frac{1}{2} = 2^{-t}$ или $2^{-1} = 2^{-t}$ и, следовательно, $t$=1.

***Ответ:*** $a = 89{,}6$ г.; $t$=1ч.

**Задача 11.**

Два жидких химических вещества $A$ и $B$ объемом 10 и 20 литров соответственно в процессе химической реакции образуют новое жидкое химическое вещество $C$. Считая, что температура в процессе реакции не меняется, а также что из каждых двух объемов вещества $A$ и одного объема вещества $B$ образуется три объема вещества $C$, определить количество вещества $C$ в произвольный момент времени $t$, если за 20 мин его образуется 6 л.

***Решение.***

Обозначим через $x$ объем (в литрах) вещества $C$, образовавшегося к моменту времени $t$ (в часах). Тогда из условий задачи следует, что к этому моменту времени в химическую реакцию вступило $\frac{2x}{3}$ литров вещества $A$ и $\frac{x}{3}$ литров вещества $B$. Последнее означает, что к указанному моменту осталось $10 - \frac{2x}{3}$ литров вещества $A$ и $20 - \frac{x}{3}$ литров вещества $B$. Таким образом, в соответствии с законом действующих масс приходим к дифференциальному уравнению

$\frac{dx}{dt} = K\left(10 - \frac{2x}{3}\right)\left(20 - \frac{x}{3}\right)$, которое можно переписать в виде

$\frac{dx}{dt} = k(15 - x)(60 - x)$, где $k$ – постоянная пропорциональности ($k = \frac{2K}{9}$).

При этом следует иметь в виду, что так как в начальный момент времени $t = 0$ вещества $C$ еще не было, то можно считать, что в этот момент времени $x = 0$. Что же касается момента времени $t = \frac{1}{3}$, то здесь уже $x = 6$.

Итак, решение исходной задачи свелось к решению так называемой краевой задачи $\frac{dx}{dt} = k(15 - x)(60 - x)$, $x(0) = 0$, $x\left(\frac{1}{3}\right) = 6$.

Для её решения проинтегрируем сначала последнее дифференциальное уравнение с учетом начального условия $x(0) = 0$. В результате получим соотношение $\frac{60-x}{15-x}=4e^{15kt}$. Теперь, так как $x = 6$ при $t = \frac{1}{3}$, то, подставляя эти значения переменных в последнее равенство, находим, что $e^{15k} = \frac{3}{2}$.

А тогда $\frac{60-x}{15-x}=4(e^{15k})^{3t}=4\left(\frac{3}{2}\right)^{3t}$, т.е. $x=\frac{15\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}\right)}{1-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}}$.

Последнее равенство и определяет количество вещества *C,* образовавшегося в результате реакции к моменту времени *t.*

***Ответ:*** $x=\frac{15\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}\right)}{1-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}}$

### 2.1.5 Задачи на движение.

**Задача 12.**

Локомотив движется по горизонтальному пути со скоростью 81 км/час. За какое время и на каком расстоянии он будет остановлен, если сопротивление движению после начала торможения равно 0,2 его веса.

***Решение.***

Независимая переменная – время *t* (в секундах).

Зависимые переменные – расстояние *s* (в метрах) и скорость *v* (в м/с).

Начальные условия: $v_0 = 81$ км/ч $= 22{,}5$ м/с; $t_0 = 0$; $S_0 = 0$.

Дополнительные условия: $F_{\text{сопрот.}} = 0{,}2 \cdot \text{P}$; $g = 10$ м/с$^2$.

Вопрос задачи: $t_1 - ?$; $S_1 - ?$; $v_1 = 0$.

Составим уравнение, используя законы Ньютона: $ma = -F_{\text{сопрот.}}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -0{,}2\cdot mg, \Rightarrow dv = -0{,}2\cdot g dt, \Rightarrow v = -0{,}2\cdot gt + C.$

Подставим начальные условия: $t = 0$, $v = 22{,}5$, $\Rightarrow C = 22{,}5$.

Частное решение имеет вид $v = -0{,}2\cdot gt + 22{,}5$. При $v = 0$, $t \approx 11$с.

Найдем *S* из условия $\frac{dS}{dt} = v$, $\frac{dS}{dt} = -0{,}2\cdot gt + 22{,}5$, $S = -0{,}1\cdot gt^2 + 22{,}5t + C_1$.

Исходя из начальных условий $C_1 = 0$, $\Rightarrow$ $S = -0{,}1\cdot gt^2 + 22{,}5t$.

При $t = 11$ $S \approx 126{,}5$ м.

***Ответ:*** $S \approx 126{,}5$ м.

**Задача 13.**

Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $v_0 = 20$ км/ч. На полном ходу ее мотор выключается, и через 40 с после этого скорость лодки уменьшается до $v_1 = 8$ км/ч. Сопротивление воды прямо пропорционально скорости движения лодки. Определить скорость лодки через 2 мин после остановки мотора.

***Решение.***

На движущуюся лодку действует сила сопротивления воды, $F_{\text{сопрот.}} = -kv$, где $k$– коэффициент пропорциональности. С другой стороны, по второму закону Ньютона $F = ma$ и, значит, $F = m\frac{dv}{dt}$. Откуда дифференциальное уравнение движения $m\frac{dv}{dt} = -kv$. Очевидно, $\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt$, или $lnv = -\frac{k}{m}t + C_1$.

Потенцируя, получим общее решение уравнения $v = e^{-\frac{k}{m}t+C_1} = Ce^{-\frac{k}{m}t}$.

Начальное условие: при $t = 0$, $v = 20$ км/ час. Откуда $v = Ce^{-\frac{k}{m}\cdot 0}$ и $C = 20$.

Тогда общий закон движения для данных условий задач $v = 20e^{-\frac{kt}{m}}$.

Теперь, используя дополнительное условие: при $t = 40$ сек $= \frac{1}{90}$ часа, скорость лодки составляет 8 км/ч. Отсюда $8 = 20e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{90}}$ или $e^{\frac{k}{m}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{90}$.

Следовательно, $v = 20\left(\frac{5}{2}\right)^{-90t}$. Отсюда искомая скорость $v = 20\left(\frac{5}{2}\right)^{-90\cdot\frac{1}{30}} =$

$= 20\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = 20 \cdot \frac{8}{125} = \frac{32}{25} \approx 1{,}28$ км/ч.

Итак, скорость лодки спустя 2 мин снизится до величины 1,28 км/час.

***Ответ:*** $v = 1{,}28$ км/час.

### 2.1.6 Задачи на истечение жидкости.

**Задача 14.**

За какое время вытечет вода из цилиндрического сосуда с диаметром основания 1,8 м и высотой 2,45 м через отверстие в дне сосуда диаметром 6 см (рис. 3)?

***Решение.***

Независимой переменной является время $t$, измеряемое в секундах, а зависимая переменная – высота столба жидкости в сосуде в момент времени $t$, измеряемая в метрах и обозначенная $h$.

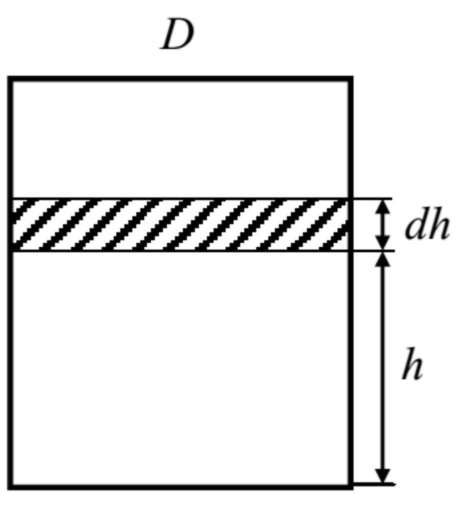



Рис.3.

Начальные условия: $t_0 = 0$; $h_0 = 2{,}45$ м.
Дополнительные условия: D = 1,8 м; $d = 0{,}06$ м; $g = 10$ м/с$^2$.
Вопрос задачи: $t - ?$; $h_1 = 0$.

Скорость истечения воды из сосуда определяется формулой $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$.

Вычислим объем освободившейся части сосуда за время $dt$**.** За это время высота столба жидкости уменьшится на $dh$ ($dh < 0$). Освободившая часть сосуда представляет собой круговой цилиндр с высотой – $dh$ и круговым основанием радиусом 0,9 м. Объем этого цилиндра равен

$$W_{\text{освоб. части}} = -\pi \cdot R^2 dh.$$

Объем вытекшей жидкости равен

$$W_{\text{выт. жидк.}} = 0{,}6 \cdot \pi \cdot r^2 \sqrt{2gh}dt.$$

Поскольку эти величины равны, составим уравнение:

$$-\pi \cdot R^2 dh = 0{,}6\pi \cdot r^2 \sqrt{2gh}dt.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Решим его.

$$\frac{R^2 dh}{\sqrt{2gh}} = -0{,}6r^2 dt, \qquad \int \frac{R^2 dh}{\sqrt{2gh}} = -0{,}6 \int r^2 dt, \quad \frac{2R^2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}} = -0{,}6r^2 t + C.$$

Подставим начальные условия $t_0 = 0$; $h_0 = 2{,}45$ м.

$$C = \frac{2 \cdot 0{,}81 \cdot \sqrt{2{,}45}}{\sqrt{20}} = 0{,}565.$$

Частное решение будет иметь вид $\frac{2R^2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}} = -0{,}6r^2 t + 0{,}565.$

Найдем время, за которое вся вода вытечет из сосуда, т.е. $h = 0$:

$$t = \frac{0{,}565}{0{,}6 \cdot 0{,}0009} \approx 1050 \text{ (сек.)}.$$

***Ответ:*** $t \approx 1050$ (сек.).

**Задача 15.**

В дне котла, имеющего форму полушара радиусом 1 м, образовалась пробоина площадью 0,02 м$^2$. За какое время вытечет вся вода, заполняющая котел (рис. 4)?

***Решение.***

Начальные условия: $t_0 = 0$; $h_0 = 1$ м.
Дополнительные условия: $R = 1$ м; S $= 0{,}02$ м$^2$.
Вопрос задачи: $t_1 - ?$; $h_1 = 0$.
Скорость истечения воды из сосуда определяется формулой:

$$v = 0{,}6\sqrt{2gh}.$$

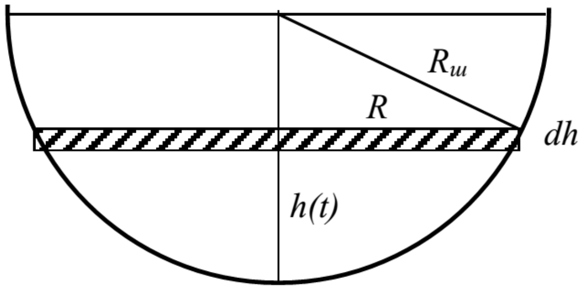



Рис. 4.

Вычислим объем освободившейся части за время $dt$.
За это время высота столба жидкости уменьшится на $dh$ ($dh < 0$). Освободившуюся часть сосуда будем считать круговым цилиндром с высотой $-dh$ и круговым основанием радиуса $R$ м, который найдем из геометрических соображений по теореме Пифагора.

$$R = \sqrt{R_ш^2 - (R_ш - h)^2} = \sqrt{2R_ш h - h^2}.$$

Объем этого цилиндра равен:

$$W_{\text{освоб. части}} = -\pi \cdot R^2 dh = -\pi \cdot (2R_ш h - h^2) dh.$$

Объем вытекшей жидкости равен:

$$W_{\text{выт. жидк.}} = 0{,}6 \cdot S \cdot \sqrt{2gh} dt.$$

Поскольку эти величины равны, составим уравнение:

$$-\pi \cdot (2R_ш h - h^2) dh = 0{,}6 \cdot S \cdot \sqrt{2gh} dt.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Решим его.

$$\int \frac{0{,}6S\sqrt{2g}}{\pi} dt = -\int 2R_ш h^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{3}{2}} dh,$$

$$\frac{0{,}6S\sqrt{2g}}{\pi} t = -\frac{4}{3} R_ш h^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} + C.$$

Подставим начальные условия и данные задачи, найдем $C$.

$$t_0 = 0, \qquad h_0 = 1 \text{ м} \Rightarrow C = \frac{14}{15}.$$

Частное решение имеет вид: $\frac{0{,}6S\sqrt{2g}}{\pi} t = -\frac{4}{3} R_ш h^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} + \frac{14}{15}$.
Найдем $t$ при условии $h = 0$, $t \approx 55$ с.

***Ответ:*** $t \approx 55$ с.

### 2.1.7 Дифференциальные уравнения в биологии

**Задача 16.**

В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента прямо пропорциональна наличному его количеству $x$. Первоначальное количество фермента $a$ в течение 1 ч удвоилось. Во сколько раз оно увеличится через 3 ч?

***Решение.***

По условию задачи имеем дифференциальное уравнение $x' = kx,\ k > 0 -$ коэффициент пропорциональности с начальным условием $x = a$ при $t = 0$.

$x = Ce^{kt}$, откуда, используя начальное условие, найдем $x = ae^{kt}$.

Коэффициент пропорциональности $k$ определяем из дополнительного условия: $x=2a$ при $t=1$. Имеем $2a = ae^k$ или $e^k=2$. Поэтому $x = a2^t$, откуда $x = = 2a$ при $t=3$. Следовательно, количество фермента через 3ч увеличится в 8 раз.

***Ответ:*** увеличится в 8 раз.

**Задача 17.**

Вливание глюкозы в кровеносную систему является важной лечебной процедурой. Для изучения этого процесса определим $\tau = \tau(t)$ как количество глюкозы в крови пациента в момент времени $t$. Допустим, что глюкоза вводится в кровь с постоянной скоростью $c$ *(г/мин)*. В то же время глюкоза разлагается и удаляется из кровеносной системы со скоростью, прямо пропорциональной имеющемуся количеству глюкозы.

***Решение.***

Пусть $c_1$ – скорость удаления глюкозы из кровеносной системы и $\tau(0)$ - начальное количество глюкозы в крови пациента. Имеем $\tau = \tau(0) + ct - c_1 t$.

Отсюда $\tau' = c - c_1$. Но в силу условия задачи $c_1 = k\tau$, где $k$ – положительная постоянная. Таким образом, имеем уравнение $\tau' = c - k\tau$, откуда $\tau' = k\left(\frac{c}{k} - \tau\right)$ или, введя обозначение

$$x = \frac{c}{k} - \tau, \qquad x' = -kx,$$

$$\frac{c}{k} - \tau = \left(\frac{c}{k} - \tau(0)\right)e^{-kt}, \qquad \text{откуда } \tau = \frac{c}{k} + \left(\tau(0) - \frac{c}{k}\right)e^{-kt}.$$

Из последней формулы видно, что с увеличением времени величина $\tau$ приближается к пределу, равному $\frac{c}{k}$. Это есть равновесное количество глюкозы в крови.

***Ответ:*** увеличением времени величина $\tau$ приближается к пределу, равному $\frac{c}{k}$.

### 2.1.8 Дифференциальные уравнения в экономике

**Задача 18.**
Население Земли в 2014 г. составляло 7200 млн. человек, а годовой прирост равнялся 80 млн. человек. Найти предположительное количество населения в 2024 г.

***Решение.***
Определим коэффициент $k$ естественного прироста:

$$k = \frac{80 \cdot 10^6}{7200 \cdot 10^6} \approx 0{,}011, \text{т. е. } 1{,}1\ \%.$$

Тогда через $t=10$ лет согласно формуле $P(t) = P_0 e^{kt}$ имеем
$P = 7200 \cdot 10^6 e^{0{,}011 \cdot 10} = 7200 \cdot 10^6 e^{0{,}11}$. Откуда $P \approx 8 \cdot 10^9$ человек.

**Ответ:** $P \approx 8 \cdot 10^9$ человек.

**Задача 19.**
Пусть скорость прироста (или убывания) некоторой величины зависит от ее наличного количества $P$ в данный момент $t$. В начальный момент $t=0$ эта величина равна $P_0$. Найти зависимость величины $A$ от времени $t$.

***Решение.***
Для построения математической модели простейшего типа роста населения принимаем, что скорость изменения количества населения прямо пропорциональна этому количеству. Скорость прироста населения выражается производной $\frac{dP}{dt}$. Если $k$ – коэффициент пропорциональности, то в случае прироста населения $\frac{dP}{dt} = kP$ и в случае его убывания $\frac{dP}{dt} = -kP$.
Разделяя в уравнение переменные, имеем $\frac{dP}{P} = kt$, откуда после интегрирования находим $P(t) = Ce^{kt}$. Начальное условие: при $t = 0$, $P = P_0$ поэтому $P_0 = Ce^{k \cdot 0}$ или $C = P_0$. Получаем закон прироста $P(t) = Ce^{kt}$ или для процесса убывания $P(t) = P_0 e^{-kt}$.

***Ответ:*** $P(t) = P_0 e^{kt}$ или $P(t) = P_0 e^{-kt}$.

## 2.2 Экспоненциальный рост и распад.

***Цель обучения:*** Решать простейшие дифференциальные уравнения процессов органического изменения

Экспоненциальный рост – это возрастание величины в геометрической прогрессии. Величина растет со скоростью, пропорциональной её значению. Это означает, что для любой экспоненциально растущей величины, чем большее значение она принимает, тем быстрее растет. Экспоненциальный рост описывается дифференциальным уравнением: $\frac{dx}{dt} = kx$. Решение этого дифференциального уравнения - экспонента: $x = x_0 e^{kt}$. Примером экспоненциального роста может быть рост числа бактерий в колонии до наступления ограничения ресурсов. Другим примером экспоненциального роста являются сложные проценты. Рост популяции бактерий аналогичен росту непрерывно начисляемых процентов.

**Задача 1.**

На начальной стадии бактериальная колония содержит в себе 100 клеток, и она начинает расти пропорционально своему размеру. Спустя 1 час численность клеток возрастает до 420.

Найти:

а) выражение, которое показывает количество бактерий через t часов;
б) количество бактерий через 3 часа;
в) темп роста спустя 3 часа;
г) время, через которое количество бактерий достигнет 10000.

***Решение.***

а) Количество бактерий – это, можно сказать, функция от времени. Количество бактерий как функцию от t можно записать как $b(t) = b_0 e^{kt}$, где $I_0$ – первоначальное количество, $b(0) = 100 \quad \rightarrow \quad b_0 = 10$, $b(t) = 100e^{kt}$, так как по условию $b(1) = 420$, то $100e^k = 420 \quad \rightarrow \quad e^k = 4{,}2 \quad \rightarrow \quad k = \mathrm{Ln}(4{,}2)$.

Значит, $b(t) = 100e^{(\ln(4,2))\cdot t} = 100 \cdot 4{,}2^t$.

б) $b(3) = 100e^{(\ln(4,2))\cdot 3} \quad \rightarrow \quad b(3) = 100 \cdot 4{,}2^3$.

в) $b(t) = 100 \cdot 4{,}2^t \quad \rightarrow \quad b'(t) = 100\ln(4{,}2) \cdot 4{,}2^t$

$b'(3) = 100\ln(4{,}2) \cdot e^{(\ln(4,2))\cdot 3} = 100\ln(4{,}2) \cdot 4{,}2^3$.

г) $100 \cdot 4{,}2^t = 10000 \quad \rightarrow \quad 4{,}2^t = 100 \quad \rightarrow \quad t = \log_{4,2} 100$.

**Задача 2.**

Используя тот факт, что население планеты в 1950 году составляло 2560 млн. человек и 3040 млн. в 1960 году, создайте модель населения мира во второй половине 20-го века. *(Предположим, что скорость роста пропорциональна численности населения.)* Какова относительная скорость роста $k$? Используйте полученную модель, для того, чтобы оценить численность населения мира в 1993 году и прогнозировать численность населения в 2020 году.

***Решение.***

Поскольку скорость роста пропорциональна численности населения, мы имеем $\frac{dx}{dt} = kx$ и, следовательно, мы получаем $x(t) = x_0 e^{kt}$.

Чтобы найти $k$ заметим, что $x(0) = 2560$ и $x(10)=3040$.
Используя это в формуле $x(t) = x_0e^{kt}$ с $t$=10, мы получаем
$x(10) = x_0e^{kt} \to 3040 = 2560e^{10k} \quad \to \quad e^{10k} = \frac{3040}{2560} \quad \to \quad \ln\frac{3040}{2560} = \ln(e^{10k})$.

$$10k = \ln\frac{3040}{2560} \quad \to \quad k = \frac{1}{10}\ln\frac{3040}{2560} \approx 0{,}017185.$$

Подставим найденное значение в формулу, получим $x(t) = 2560e^{0{,}017185t}$

Это уравнение поможет рассчитать численность в 1993 году и прогнозировать численность населения до 2020 года.

$x(43) = 2560e^{0{,}017185\cdot 43} \approx 536\,000\,000$ человек.
$x(70) = 2560e^{0{,}017185\cdot 70} \approx 852\,400\,000$ человек.

## Упражнения

### Уровень A.

*В упражнениях 1-5, найдите экспоненицальную функцию, которая удовлетворяет следующие условия.*

**1**. Перноналаьное значение = 38, возрастает с темпом 15% в год.
**2.** Первоначальное значение = 67, убывает с темпом 0.41% в неделю.
**3.** Первоначальное значение = 30,656, возрастает с темпом 3% в год.
**4**. Первоначальная масса = 15 g, убывает с темпом 3.5% в день.
**5.** Распад 921 мг изотопа определяется как $A(t) = 921e^{-0.031t}$, где $t$ время в годах. Найдите оставшееся количество изотопа после 4-х лет.

***Ответы:*** **1.** $f(t) = 38 \cdot 1.15^t$. **2.** $f(t) = 67 \cdot 0.9959^t$.
**3.** $P(t) = 30{,}656 \cdot 1.03^t$. **4.** $m(t) = 15 \cdot 0.965^t$. **5.** 814.

**6.** Ваш депозит составляет $1500 на счету, что дает вам 5% годовую ставку. Каков будет ваш баланс через 6 лет?
***Ответ:*** $y = (1{,}05)^6 = \$2010{,}14$.

**7.** Количество мышей составляет 25 000 и убывает на 20% каждый год. Напишите модель для этой ситуации.
***Ответ:*** $y = 25000(1 - 0{,}2)^6$.

**8.** Для модели в задании № 2, какое количество мышей будет через 3 года?
***Ответ:*** $y = 25000(0{,}8)^3 = 12{,}800$ мышей.

**9.** Количество комаров на пляже утраивается каждый год, начиная с 1999. В 1999 было 2 500 комаров. Напишите модель для этой ситуации.
***Ответ:*** $y = 2\,500(3)^x$.

**10.** Для модели в задании № 4, сколько комаров было в 2005?

***Ответ:*** $y = 2\,500(3)^x = 1822500$ комаров.

**11.** Дана модель у = 200(80)$^x$, данная модель является моделью экспоненциального роста или распада? Найдите фактор роста или распада и процент изменения за период времени.

***Ответ:*** распада; фактор равен = 0.8; процент спада = 20%.

**12.** На данный момент на моем счету есть \$500, после 4 лет с 2.5% годовой ставкой, каким был первоначальный взнос?

***Ответ:*** $y = 500(1{,}025)^{-4} = \$452{,}98$.

**Уровень В.**

**13.** Микробиолог изучает рост популяций простейших организмов. Для одного из таких организмов предложена модель $P = 100 - 50e^{-\frac{1}{4}t}$, где Р – количество после *t* минут.

(а) Напишите:

(i) изначальное количество организмов;

(ii) значение, когда *t* стремится к бесконечности.

(b) Найдите время, когда количество организмов будет 75, округлите свой ответ до двух значащих цифр.

***Ответ:*** **(а)** (i) $t = 0$; $P = 50$; (ii) $e^{\frac{-t}{4}} \to 0$;

**(b)** t = 2.8.

**14.** Рост мальчика записывался в течение первых 7 лет. Модель ситуации следующая: $y = 130 - 80e^{-\frac{5x}{16}},\ 0 \le x \le 7.$ Рост мальчика выражается через *у* см, когда ему было *x* лет

(а) Используйте эту модель, чтобы оценить:

(i) рост мальчика при рождении;

(ii) возраст мальчика, когда его рост составлял 1метр;

(iii) темп роста ( см в год) когда мальчику было ровно 4 года.

(b) Объясните, почему данная модель будет не эффективной, когда мальчик станет подростком.

***Ответ:*** **(а)** (i) 50 см; (ii) $x \approx 3.13$…Возраст 3 года и 2 мес.;

(iii) 7.16 см в год.

**(b)** $x \to \infty \Rightarrow y \to 130$ Рост мальчика, скорее всего, будет $> 130$ см.

**15.** Модель температуры, в $T°$ Цельсий, чашки чая после того как она была налита из чайника выражается $T = 63 \cdot 3^{-\frac{x}{A}} + 21$, где *А* положительная константа .

(а) используйте модель чтобы:

(i) найти температуру чашки чая, когда ее только налили;

(ii) спрогнозируйте температуру чая, когда она простоит долгое время.

(b) преобразуя уравнение, и логарифмируя, покажите, что $A\ln\left(\frac{63}{T-21}\right) = x\ln 3$.

(c) дано $T = 40$ при $x = 15$, найдите значение $A$, ответ дайте до трех значащих цифр.

***Ответ:*** **(a)** (i) $x = 0$, $T = 84$; (ii) $x \to \infty$, $T = 21$;
**(c)** $A = 13.7$.

**16.** В один определенный день объем жидкости, $V$ m$^3$, в бочке меняется относительно времени, $t$ часов после полуночи, согласно формуле

$$V = 8 + 6e^{-\frac{1}{12}t}.$$

(a) найдите объем жидкости в бочке, когда $t = 0$.

(b) найдите темп изменения ( m$^3$ в час) объема жидкости , когда $t$ =12, интерпретируя знак.

(c) найдите, до целых минут, когда объем жидкости в бочке будет 11 m$^3$.

***Ответ:*** (a) 14 (m$^3$);
(b) t = 12, $V'(t) = -0.5e^{-1}$ (= –0.1839..)
Отрицательный знак ⇒ объем убывает;
(c) 08:19.

**Уровень C.**

**17.** В начале эксперимента, было 100 бактерий. Если количество бактерий увеличивается по экспоненциальной модели роста с коэффициентом $k = 0.02$, каким будет их количество через 5 часов? Сколько времени понадобится для того, чтобы количество бактерий удвоилось?

***Ответ:*** $P(5) = 100e^{0,025} \approx 110,517 \approx 111$; $t = \frac{ln2}{0,02} \approx 34,6574$ .

**18.** Период полураспада радия-226 $\left({}^{226}_{88}Ra\right)$ составляет 1590 лет.

(a) Образец радия-226 обладает массой 100 мг. Найти формулу для массы $\left({}^{226}_{88}Ra\right)$, что остается после $t$ лет.

(b) Найти массу после 1000 лет, ответ записать в миллиграммах.

(c) Через какое время масса будет снижена до 30 мг?

***Ответ:*** **(a)** $m(t) = 100e^{-\frac{ln2}{1590}t}$;
**(b)** $m(t) = 100e^{-\frac{ln2}{1590}\cdot 1000} \approx 65$ миллиграмм;
**(c)** $t = -\frac{1590\, ln0,3}{\ln 2} \approx 2762$ года.

**19.** Количество бактерий увеличивается в геометрической прогрессии. В начале эксперимента, есть 6000 бактерии, и один час спустя, количество увеличилось до 6400. Как долго количество бактерий будет увеличиваться, чтобы достигнуть количества равного 10 000? Ответ округлите до ближайшего часа.

***Ответ:*** $t = \frac{1}{0.06454}\ln\left(\frac{10000}{6000}\right) \approx 7,915 \approx 8$.

**20.** В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента прямо пропорциональна наличному его количеству $x$. Первоначальное количество фермента $a$ в течение 1 ч удвоилось. Во сколько раз оно увеличится через 3ч?

***Ответ:*** Количество фермента через 3ч увеличится в 8 раз.

**21.** Культуре из 100 бактерий предоставлена возможность размножаться при благоприятных условиях. Через 12 ч число бактерий достигло 500. Сколько бактерий будет через 2 суток после начала опыта?

***Ответ:*** В течение 24 ч количество бактерий увеличится в 25 раз .

**22.** Население Земли в 2014 г. составляло 7200 млн. человек, а годовой прирост равнялся 80 млн. человек. Найти предположительное количество населения в 2024г.

***Ответ:*** $P \approx 8 \cdot 10^9$ человек.

**23.** Сосуд объёмом в 20 литров содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд втекает 0,1 л азота в секунду, который непрерывно перемешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 99% азота?

***Ответ:*** количество азота (в литрах) $y(t) = 20 - 4e^{-t/200}$; $y(t) = 19{,}8$ при $t \approx 600$ сек = 10 мин.

**24.** Тело охладилось за 10 минут от $100^0$ до $60^0$. Температура окружающего воздуха поддерживается равно $20^0$. Когда тело остынет до $25^0$? Примите, что скорость остывания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

***Ответ:*** температура тела $y(t) = 20 + 80\cdot 2^{-t/10}$, $y(t) = 25$ при $t = 40$ мин.

**25.** Согласно опытам, в течении года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадётся половина имеющегося количества радия? Используйте закон радиоактивного распада: количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющемуся в рассматриваемый момент.

***Ответ:*** оставшееся количество радия: $y(t) = y(0) \cdot (1 - 0{,}00044)^t$,
$y(t) = 0{,}5y(0) \approx 1600$ лет.

**26.** За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака диаметром $2R = 1{,}8$ м и высотой $H = 2{,}45$ м через отверстие в дне диаметром $2r = 6$ см? Считать, что ось цилиндра вертикальна и жидкость из сосуда вытекает со скоростью, равной $0{,}6\sqrt{2gh}$, где $g = 10$ м/сек$^2$ – ускорение силы тяжести, h – высота уровня воды над отверстивем.

***Ответ:*** высота уровня воды $h(t)$, $\sqrt{H} - \sqrt{h} = 0{,}3\sqrt{2g}\,\frac{r^2}{R^2}t$,

$h(t) = 0$ при $t \approx 1050$ сек = 17,5 мин.

## Дополнительные упражнения

**1.** За какое время тело, нагретое до 100 градусов, в комнате с температурой 20 градусов охладится до 25 градусов, если до 60 градусов оно охладилось за 20 мин?

***Ответ:*** $-\frac{tln2}{20} = -4ln2, \ \ t = 80$ мин.

**2.** Скорость охлаждения тел в воздухе прямо пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Температура воздуха равна 20º С. Известно, что в течение 20 мин тело охлаждается от 100 до 60ºС.

Определить закон изменения температуры Т тела в зависимости от времени *t.*

***Ответ:*** $T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$.

**3.** Кусок металла (сталь) с температурой $a$ градусов помещен в печь, температура которой равномерно повышается в течение часа от $a$ до $b$ градусов. Найти температуру тела через час.

***Ответ:*** $T=b - \frac{b-a}{60k}(1 - e^{-60k})$. Для стали $k = 0{,}46$.

**4.** Сосуд объемом 30 л наполнен воздухом (80% азота, 20% кислорода). В сосуд втекает 0,2 л азота в секунду, который непрерывно перемешивается с находящимися в сосуде воздухом. Из сосуда вытекает такое же количество смеси. Через какое время в сосуде будет 90% азота?

***Ответ:*** $t = 150\ ln2 \approx 150 \cdot 0{,}69 \approx 103{,}5\ (c) \approx 1{,}7(\text{мин})$.

**5.** В баке содержится $V$ л раствора, содержащего $m$ кг соли. Вода вливается со скоростью $a$ л/мин, а смесь выливается со скоростью $b$ л/мин. Сколько соли останется в баке через час?

***Ответ:*** $t = 60, x = \frac{mV^{\frac{b}{b-a}}}{(V+(b-a)\cdot 60)^{\frac{b}{b-a}}}$.

**6.** В резервуар, содержащий 10 кг соли на 100 л смеси, каждую минуту поступает 30 л воды и вытекает 20 л смеси. Определить, какое количество соли останется в резервуаре через $t$ мин, предполагая, что смесь мгновенно перемешивается.

***Ответ:*** $x = \frac{1000}{(10+t)^2}$.

**7.** В баке находится 60 л раствора, содержащего 5 кг соли. В бак непрерывно подается вода со скоростью 3 л/мин, которая мгновенно перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает из бака с той же скоростью 3л/мин. Сколько соли останется в баке через час?

***Ответ:*** $x = 5e^{-0{,}05\cdot 60} = 5e^{-3} \approx 0{,}249$ л.

**8.** Радиоактивный элемент $RaB$ распадается наполовину, образуя радиоактивный элемент $RaC$, в течение 26,7 мин. Найти время распада 0,2 первоначального количества $RaB$.

***Ответ:*** $t = \dfrac{26{,}7}{\ln 2}\ln\dfrac{a}{a-0{,}2a} = \dfrac{26{,}7}{\ln 2}\ln\dfrac{1}{0{,}8} = \dfrac{26{,}7}{\ln 2}\ln\dfrac{5}{4} \approx 8{,}6$.

**9.** Найти период полураспада радиоактивного вещества, если за 2 ч распадается 0,1 часть вещества.

***Ответ:*** $t = \frac{ln4}{ln0{,}9} = 13{,}9$ (час.).

**10.** Культуре из 100 бактерий предоставлена возможность размножаться при благоприятных условиях. Через 12 ч число бактерий достигло 500. Сколько бактерий будет через 2 суток после начала опыта?

***Ответ:*** В течение 24 ч количество бактерий увеличится в 25 раз.

**11.** Скорость увеличения площади молодого листа виктории - регии, имеющего форму круга, прямо пропорциональна длине окружности листа и количеству солнечного света, падающего на него. Последнее прямо пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикально к листу. Найти зависимость между площадью $S$ листа и временем $t$, если в 6 ч утра эта площадь равнялась 1600 см$^2$, а в 18 ч того же дня – 2500 см$^2$.

***Ответ:*** $S = \dfrac{160000}{(9-\sin(\frac{\pi}{12}(t-12)))^2}$.

**12.** Составить дифференциальное уравнение окружностей радиуса 1, центра которых лежат на прямой $y = 2x$.

***Ответ:*** $(y-2x)^2(2y'^2+1) = (2y'^2+1)^2$.

**13.** Составить дифференциальное уравнение парабол с осью, параллельной оси ординат, касающихся одновременно прямых $y = 0$ и $y = x$.

***Ответ:*** $xy'^2 = y(2y'\text{-}1)$.

**14.** Найти кривую, проходящую через точку $M$ (-1;-1), для которой отрезок, отсекаемый на оси $Ox$ касательной к кривой в любой ее точке, равен квадрату абсциссы точки касания.

***Ответ:*** $y = \frac{Cx}{1-x}, C = 2.$

**15.** Пуля, двигаясь со скоростью $v_0$ = 400 м/с. пробивает стену толщиной $h$ = 0,2 *м* и вылетает из нее со скоростью $v_1$ = 100 м/с. Считая силу сопротивления стены пропорциональной квадрату скорости движения пули, найти время *T* движения пули в стене.

***Ответ:*** $T = -\frac{h}{lnv_1 - lnv_0} \cdot \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right) \;\to\; T \approx 0{,}001.$

**16.** Найти кривую, для которой произведение абсциссы любой точки на отрезок, отсекаемый нормалью в этой точке на оси *Ox,* равно удвоенному квадрату расстояния этой точки от начала координат.

***Ответ:*** $1 + \frac{y^2}{x^2} = Cx^2,\ C > 0 \;\to\; y = \mp\sqrt{Cx^4 - x^2},\ C > 0.$

**17.** Кривая *y = y(x)* проходит через начало координат. Если в точке *M* кривой провести нормаль, то середина отрезка *MK* (где *K* – точка пересечения нормали и оси абсцисс) лежит на параболе $y^2 = ax$. Найти уравнение этой кривой.

***Ответ:*** $y' - \frac{y}{2a} = -\frac{2x}{y} \;\to\; y = \mp 2\sqrt{ax + a^2 + Ce^{x/a}},$

$$y = \mp 2\sqrt{ax + a^2 - a^2 e^{x/a}}.$$

## 2.3 Задачи нахождения максимума и минимума

***Цель обучения:***
решать задачи геометрического и физического содержания с помощью производной.

Задачи на оптимизацию являются задачами на нахождение минимума и максимума функции. Оптимизация используется для решения сложных задач на проектирование, чтобы повысить стоимость, надежность и производительность в широком спектре приложений.

Для решения задач на оптимизацию нужно:

1. Внимательно прочитать задачу.
2. Задайте себе вопросы: Какова цель? Какие ограничения?
3. Определите данные количества и условия.


Схема 1. Этапы решения задач на оптимизацию

**Задача 1.**
Каким должно быть внутреннее сопротивление батареи, чтобы обеспечить максимальную передачу мощности на напряжение (Рис. 5).

***Решение.***

$I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, $P = P(R) = I^2R = \left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}$.

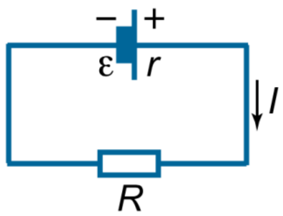



Рис. 5

$$P'(R) = \left(\frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}\right)' = \varepsilon^2 \frac{r-R}{(R+r)^3}.$$

производная равна нулю, если $R = r$, а с увеличением $R$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, это значение соответствует максимуму функции $P(R)$.

$$P_{max} = \frac{\varepsilon^2 r}{(r+r)^2} = \frac{\varepsilon^2}{4r}.$$

***Ответ:*** $P_{max} = \frac{\varepsilon^2}{4r}$.

**Задача 2.**
Капля дождя начальной массы $m_0$ падает из-за силы тяжести. При падении капля испаряется, так что ее масса со временем уменьшается по линейному закону $m(t) = m_0 - bt$, где $b$ - скорость испарения. Определите момент времени, в который кинетическая энергия капли является наибольшей.

***Решение.***
$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(gt)^2}{2} = \frac{mg^2t^2}{2}$. Переложив эту формулу в закон изменения массы, получим функцию $K(t)$: $K(t) = \frac{m(t)g^2t^2}{2} = (m_0 - bt)\frac{g^2t^2}{2} = \frac{m_0g^2t^2}{2} - \frac{bg^2t^3}{2}$;

$$K'(t) = \left(\frac{m_0g^2t^2}{2} - \frac{bg^2t^3}{2}\right)' = m_0g^2t - \frac{3bg^2t^2}{2} = g^2t\left(m_0 - \frac{3bt}{2}\right);$$

$$K'(t) = 0, \Rightarrow g^2t\left(m_0 - \frac{3bt}{2}\right) = 0, \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = \frac{2m_0}{3b}.$$

Производная $K'(t)$ - квадратичная функция. Первый корень $t_1 = 0$ – минимальная точка, а второй корень $t_2 = \frac{2m_0}{3b}$ максимальная точка функции $K(t)$. Следовательно, капля будет иметь наибольшую кинетическую энергию в то время $t_2 = \frac{2m_0}{3b}$, В этот момент кинетическая энергия равна:

$$K_{max} = \frac{m_0g^2\left(\frac{2m_0}{3b}\right)^2}{2} - \frac{bg^2\left(\frac{2m_0}{3b}\right)^3}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4m_0^3g^2}{9b^2} - \frac{8m_0^3g^2}{27b^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4m_0^3g^2}{27b^2} = \frac{2m_0^3g^2}{27b^2}.$$

***Ответ:*** $K_{max} = \frac{2m_0^3g^2}{27b^2}$.

**Задача 3.**
Источник света расположен на отрезке, соединяющем центры сфер с радиусами $R_1$ и $R_2$. Определите местоположение источника, при котором общая площадь освещаемой поверхности двух сфер является наибольшей.

***Решение.***
Пусть расстояние $O_1, O_2$ между центрами сфер будет равен $L$, и источник света находится на расстоянии $x$ от центра первой сферы (рис. 6). Освещенные области - это поверхности сферических секторов. Их общая площадь определяется по формуле

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi R_1 h_1 + 2\pi R_2 h_2,$$

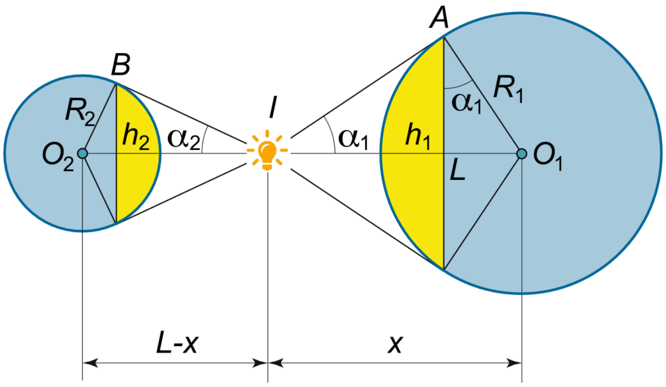



Рис. 6

Из подобия треугольников $ALO_1$ и $O_1AI$, имеем: $h_1 = R_1 - R_1 sin\alpha_1$, где $sin\alpha_1 = \frac{R_1}{x}$. Следовательно $h_1 = R_1 - R_1 \cdot \frac{R_1}{x} = R_1 - \frac{R_1^2}{x}$.

Аналогичное выражение для второй сферы выглядит следующим образом:

$$h_2 = R_2 - R_2 \cdot \frac{R_2}{x} = R_2 - \frac{R_2^2}{L-x}.$$

Итак, общая освещаемая площадь:

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi R_1 \left(R_1 - \frac{R_1^2}{x}\right), +2\pi R_2 \left(R_2 - \frac{R_2^2}{L-x}\right)$$

$$= 2\pi R_1^2 - \frac{2\pi R_1^3}{x} + 2\pi R_2^2 - \frac{2\pi R_2^3}{L-x}.$$

Найдем производную

$$S'(x) = \left(2\pi R_1^2 - \frac{2\pi R_1^3}{x} + 2\pi R_2^2 - \frac{2\pi R_2^3}{L-x}\right)' = \frac{2\pi R_1^3}{x^2} - \frac{2\pi R_2^3}{(L-x)^2},$$

$$S'(x) = 0, \Rightarrow \frac{2\pi R_1^3}{x^2} - \frac{2\pi R_2^3}{(L-x)^2} = 0, \Rightarrow \frac{x^2}{(L-x)^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}.$$

При прохождении через ноль производная меняет знак с плюса на минус, т.е. выше указанная точка является максимумом функции $S(x)$.

Таким образом, освещаемая область является наибольшей, когда источник света расположен в точке, в которой отношение квадратов расстояний от источника к центрам сфер, является отношением их радиусов в кубе.

**Задача 4.**

Сосуд, наполненный жидкостью высоты -$h$, находится на горизонтальной поверхности. Сосуд имеет боковое отверстие, через которое может вытекать жидкость. В каком положении отверстия струя жидкости имеет наибольшее расстояние от сосуда?

***Решение.***

Предположим, что скорость потока жидкости через отверстие описывается законом Торричелли:

$v = \sqrt{2g(h-x)}$, где $x$ - высота до отверстия над горизонтальной поверхностью, $h - x$ - высота столба жидкости над отверстием, $g$ – ускорение свободного падения (рис.7).

Рассчитаем дальность струи - $y$ предполагая, что движение жидкости описывается, также как уравнение движения материальной точки. В этом случае время, в течение которого жидкость, вытекающая из отверстия, достигает поверхности земли, определяется как

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

И дальность струи равна

$$y = vt = v \cdot \sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

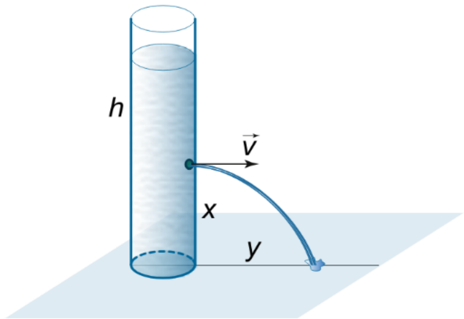



Рис.7.

Подставьте выражение скорости $v$ из закона Торричелли. получаем:

$$y = y(x) = \sqrt{2g(h-x)} \cdot \sqrt{\frac{2x}{g}} = 2\sqrt{hx - x^2}.$$

Мы получили выражение для дальности струи $y$ в зависимости от высоты проема $x$. Исследуем функцию в критических точках:

$$y'(x) = \left(2\sqrt{hx - x^2}\right)' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{hx-x^2}} \cdot (hx - x^2)' = \frac{h-2x}{\sqrt{hx-x^2}} = 0,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h - 2x = 0, \\ h - x \neq 0. \end{cases} \Rightarrow x = \frac{h}{2}.$$

Понятно, что эта точка максимальна, потому что при прохождении через данное значение производная меняет знак с плюса на минус.

Таким образом, отверстие для протекающей жидкости должно быть расположено точно в середине столба жидкости. В этом случае радиус действия струи будет наибольшим и равным высоте столба жидкости:

$$y_{max} = 2 \cdot \sqrt{h \cdot \frac{h}{2} - \left(\frac{h}{2}\right)^2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{4}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{h^2}{4}} = h.$$

***Ответ:*** $h$.

**Задача 5.**

Открытая коробка должна быть изготовлена из прямоугольной жести размером 64 × 24 см. На рисунке 8 показано, как квадрат боковой длины $x$ см должен быть вырезан из каждого угла, чтобы можно было сложить коробку, как показано на рисунке 9.

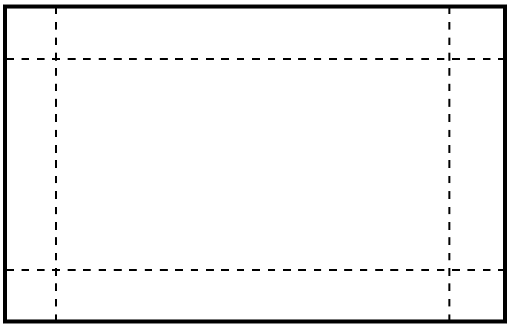


Рис.8.

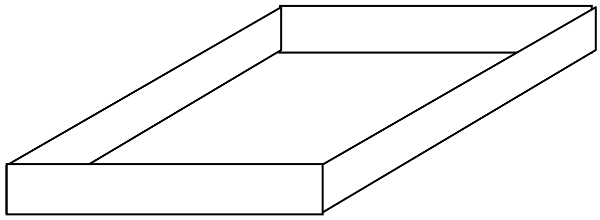


Рис.9.

a) Покажите, что объем коробки, $V$ см$^3$, определяется

$$V = 4x^3 - 176x^2 + 1536x\,.$$

b) Покажите, что стационарные точки $V$ появляются, когда

$$3x^2 - 88x + 384 = 0\,.$$

c) Найти значение $x$, стационарных точек.

d) Найти с точностью до см$^3$ максимальное значение для $V$.

***Решение.***

$\boldsymbol{a}$) $V = x(64 - 2x)(24 - 2x)$;

$\boldsymbol{b}$) $\dfrac{dv}{dx} = 12x^2 - 352x + 1536;\ 12x^2 - 352x + 1536 = 0;\ 3x^2 - 88x + 384 = 0.$

$\boldsymbol{c}$) $(3x - 16)(x - 24) = 0;\ \ x = \dfrac{16}{3};$

$$x = \frac{16}{3};\ V = \frac{16}{3}\left(64 - 2 \cdot \frac{16}{3}\right)\left(24 - 2 \cdot \frac{16}{3}\right) \approx 3793.$$

$\boldsymbol{d}$) $\frac{d^2v}{dx^2} = 24x - 352,$ где $x = \frac{16}{3}$ ; $\frac{d^2v}{dx^2} = -224 < 0.$

***Ответы***: $x = \frac{16}{3}; V_{max} \approx 3793.$

## Упражнения.

### Уровень А.

**1.** На рисунке 10 показана коробка упаковки для фруктового сока емкостью 1000 см$^3$. Коробка представляет собой закрытый кубоид, основание которого имеет размеры ширина $x$ см, длина $2x$ см, а его высота составляет $h$ см.

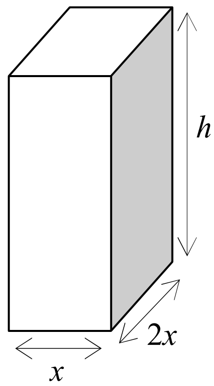



Рис. 10.

**a)** Показать, что площадь поверхности коробки, $A$ см$^2$, определяется как

$$A = 4x^2 + \frac{3000}{x}.$$

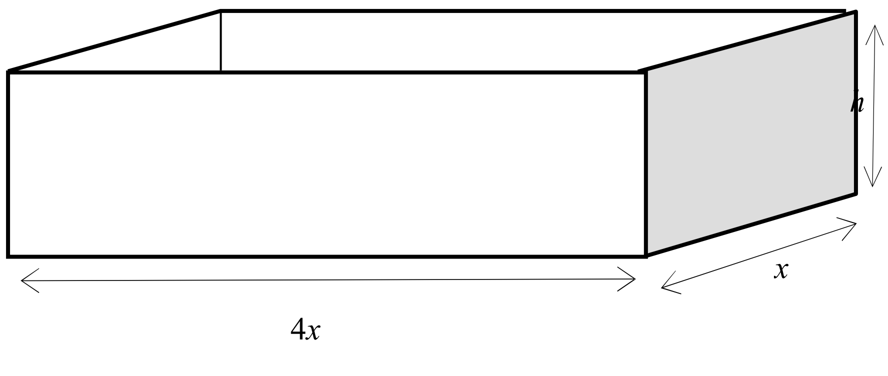
**b)** Найти значение $x$, стационарных точек.

**c)** Рассчитайте минимальное значение для $A$, обоснуйте, что значение $A$ является минимальное.

***Ответ:*** $x = \sqrt[3]{375} \approx 7.21;\ A_{min} \approx 624.$

**2.** На рисунке 11 показана коробка в форме кубоида с прямоугольным основанием, где ширина $x$ см, длина $4x$ см и без верхней грани. Высота коробки составляет $h$ см. Дано, что площадь поверхности коробки составляет 1728 см$^2$.

Рис. 11.




а) Покажите, что $h = \frac{864-2x^2}{5x}$.

b) Используйте часть **(a)**, чтобы показать, что объем коробки, $V$см$^3$

$$V = \frac{8}{5}(432x - x^3).$$

c) Найти значение $x$, стационарных точек.

d) Найти максимальное значение для $V$, обоснуйте, что значение $V$ является максимальным.

***Ответ:*** $x = 12$; $V_{max} = 5529{,}6$.

**3.** На рисунке 12 показан дизайн одежды, состоящий из двух одинаковых прямоугольников, прикрепленных к каждой из прямых сторон круглого сектора радиусом $x$см. Прямоугольники измеряют $x$ см на $y$ см, а круговой сектор составляет угол в один радиан в центре. Периметр фигуры 40 см.

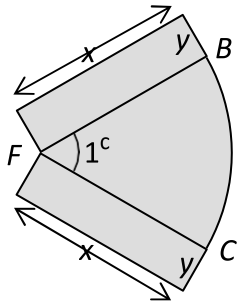



Рис. 12.

a) Покажите, что площадь фигуры $A$ cm$^2$, равна $A = 20x - x^2$.

b) Определить дифференцированием значение $x$, для которого $A$ является стационарным.

c) Показать, что значение $x$, найденное в части (b), дает максимальное значение для $A$.

d) Найти максимальную площадь дизайна.

***Ответ:*** $x = 10$; $A_{max} = 100$.

**4.** На рисунке 13 показана закрытая цилиндрическая банка радиусом $r$ см и высотой $h$ см.

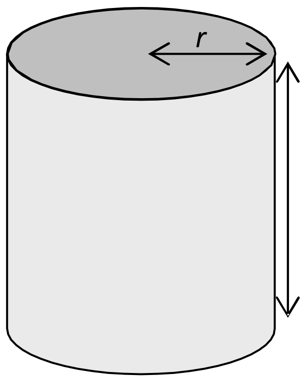



Рис. 13.

a) Учитывая, что площадь поверхности банки составляет $192\pi$см$^2$, показать, что объем может, $V$см$^3$, определяется $V = 96\pi r - \pi r^3$.
b) Найти значение $r$, для которого $V$ является стационарным.
c) Обоснуйте, что значение $r$, найденное в части (b), дает максимальное значение для $V$.
d) Рассчитайте максимальное значение $V$.

***Ответ:*** $r = 4\sqrt{2} \approx 5.66$; $V_{max} = 256\pi\sqrt{2} \approx 1137$.

**Уровень B**

**5.** Стадион по легкой атлетике состоит из двух полукругов, каждый из которых имеет радиус $r$ м, соединенных прямоугольником длиной $x$ метров. Длина беговой дорожки стадиона равна 400 м и охватывает площадь $A$ м$^2$. (рис. 14)

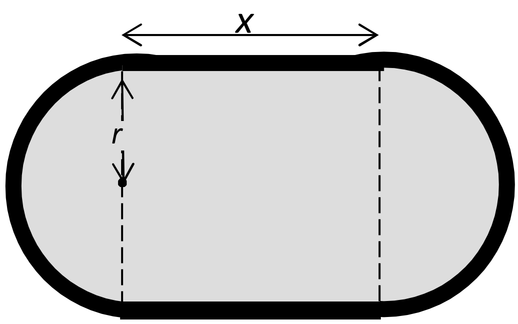



Рис. 14.

a) Покажите, что $A = 400r - \pi r^2$.

Для безопасного проведения мероприятий на стадионе необходимо, чтобы площадь, ограниченная дорожкой, была наибольшей.

b) Определить путем дифференцирования точное значение $r$, для которого $A$ является стационарным.
c) Покажите, что значение $r$, найденное в части (b), дает максимальное значение для $A$.
d) Покажите, что максимальная площадь, окружаемая дорожкой, составляет

$$A_{max} = \frac{40000}{\pi} \text{ м}^2.$$

***Ответ:*** $r = \frac{200}{\pi} \approx 63.66$.

**6.** На рисунке 15 показан дизайн логотипа предупреждения об опасности, который состоит из трех одинаковых секторов радиуса $r$ см, соединенных вместе в центре.

Каждый сектор составляет угол $\theta$ радиан в центре, и сектора расположены на равном расстоянии, так что логотип имеет симметрию вращения порядка 3. Площадь логотипа 75 см$^2$.

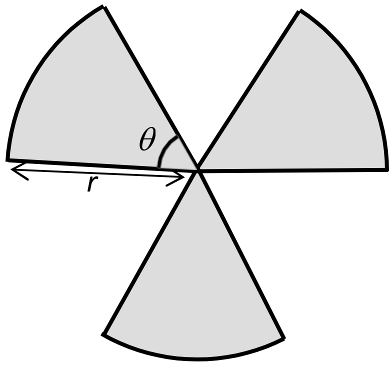



Рис. 15.

a) Покажите, что периметр $P$ см логотипа определяется как

$$P = 6r + \frac{150}{r}.$$

b) Определите путем дифференцирования значение $r$, для которого $P$ является стационарным.

c) Покажите, что значение $r$, найденное в части (b), дает минимальное значение для $P$.

d) Найдите минимальный периметр логатипа.

***Ответ:*** $r = 5, P_{min} = 60$.

**7.** На рисунке 16 показана сплошная прямая призма высотой $h$ см. Поперечное сечение призмы представляет собой круговой сектор радиусом $r$ см, составляющий угол 2 радиана в центре.

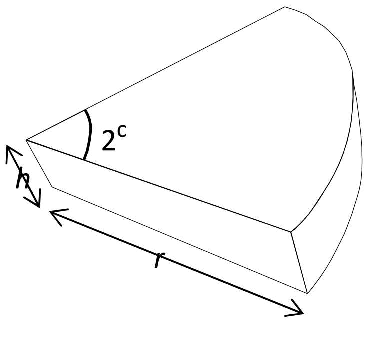



Рис. 16.

a) Учитывая, что объем призмы составляет 1000 см$^3$, покажите, что $S = 2r^2 + \frac{4000}{r}$, где $S$ см$^2$ - площадь полной поверхности призмы.

b) Определите значение $r$ и значение $h$, при котором $S$ принимает наименьшее значение. Полностью обоснуйте ответ.

***Ответ:*** $r = 10, h = 10$.

**8.** На рисунке 17 показана конструкция кормушки для лошадей в форме полой треугольной призмы с открытым верхом. Грани на двух концах кормушки прямоугольные, равнобедренные треугольники, где $AB = BC = DE = EF, \angle ABC = \angle DEF = 90°$. Треугольные грани расположены вертикально, а края $AD, BE$ и $CF$ горизонтальные. Объем кормушки 4 м$^3$.

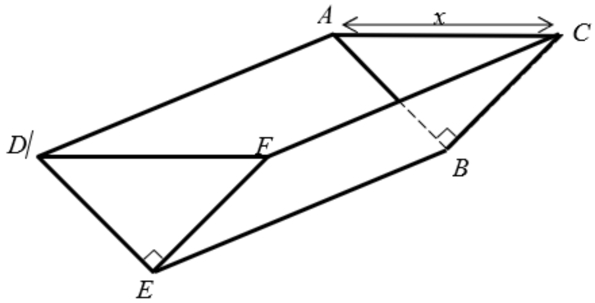



Рис. 17.

a) Покажите, что площадь кормушки определяется как $A = \frac{1}{2}x^2 + \frac{16\sqrt{2}}{x}$.
b) Найдите значение $x$, для которого $A$ является стационарным, давая ответ в виде $k\sqrt{2}$, где $k$ - целое число.
c) Покажите, что при значение $x$, найденное в части (b), значение $A$ минимальное.
d) Покажите точными расчетами, что минимальная площадь поверхности кормушки составляет 12 м$^2$.
e) Докажите, что длина $ED$ равна длине $EB$.

***Ответ:*** $x = 2\sqrt{2} \approx 2.82;\ ED = EB = 2.$

**9.** На рисунке 18 показан полый контейнер, состоящий из прямого цилиндра радиусом $r$ см и высотой $h$ см, соединенного с полусферой радиуса $r$ см. Цилиндр открыт в соединении с полусферой, где полусфера также открыта на круглом основании.

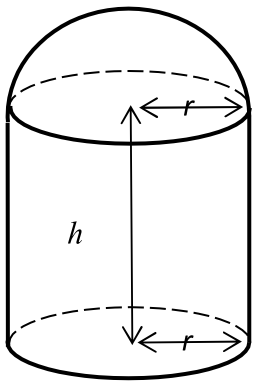



Рис. 18.

a) Учитывая, что объем контейнера составляет $2880\pi$см$^3$, покажите, что общая площадь поверхности контейнера, $S$ см$^2$, определяется как

$$S = \frac{5\pi}{3r}(r^3 + 3456).$$

b) Покажите, что при стремлении $S$ к минимальному значению, $r = h$.

**10.** Дизайн кофейной банки с крышкой «надави». Баночка имеет форму правильного круглого цилиндра радиусом $x$ см и крышку шириной 2 см, которая плотно прилегает к верхней части банки, поэтому можно предположить, что он имеет такой же радиус, как и банка. Баночку и ее крышку изготовили из листового металла без остатка. Лист металла, использованный для изготовления банки и ее крышки, составляет $190\pi$см$^2$. (Эта фигура не включает ручку крышки, которая сделана из другого материала.)

a) Покажите тот объем банки, $V$ см$^3$, определяется $V = \pi(95x - 2x^2 - x^3)$.

b) Найдите значение $x$, для которого $V$ является стационарным.

c) Покажите, что при значении $x$, найденное в части (b), значение $V$ максимальное.

d) Определите максимальный объем банки.

***Ответ:*** $x = 5$; $V_{max} = 300\pi \approx 942$.

**11.** Модель прибыли малого бизнеса P£, является уравнение

$$P = \frac{(54x + 6y - xy - 324)^2}{3x},$$

где $x$ и $y$ - положительные переменные, связанные с управлением компанией. Также известно, что $3x + y = 54$.

a) Покажите, что $P = 108x - 36x^2 + 3x^3$.

b) Покажите, что максимальное значение $P$ равно £96.

Владелец малого бизнеса обеспокоен очень маленькой прибылью и поэтому обратился со своими расчетами к математику. Математик согласен с тем, что расчеты верны, но утверждает, что прибыль может быть существенно выше.

c) Объясните расчетами рассуждения математика.

**12.** Точка $P$ лежит на кривой $y = x^2$. Найдите координаты точки $P$ так, чтобы расстояние от точки $A(10; 2)$ до точки $P$ было минимальным.

***Ответ:*** $P(2; 4), d_{min} = 2\sqrt{17}$.

## 2.4 Дифференциальные уравнения гармонических колебаний

***Цель обучения:*** решать дифференциальные уравнения гармонических колебаний

### 2.4.1 Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка вида $y''+py'+qy=0$,где $p$, $q$ − постоянные коэффициенты.

Для каждого такого дифференциального уравнения можно записать так называемое *характеристическое уравнение:* $k^2+pk+q=0$.

Общее решение однородного дифференциального уравнения зависит от корней характеристического уравнения, которое в данном случае будет являться квадратным уравнением. Возможны следующие случаи:

1. Дискриминант характеристического квадратного уравнения положителен: $D>0$. Тогда корни характеристического уравнения $k_1$ и $k_2$ действительны и различны. В этом случае общее решение описывается функцией $y(x)=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$, где $C_1$ и $C_2$ − произвольные действительные числа.
2. Дискриминант характеристического квадратного уравнения равен нулю: $D=0$. Тогда корни действительны и равны. В этом случае говорят, что существует один корень $k_1$ второго порядка. Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид: $y(x)=(C_1x+C_2)e^{k_1x}$.
3. Дискриминант характеристического квадратного уравнения отрицателен: $D<0$. Такое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни $k_1=\alpha+\beta i, k_2=\alpha-\beta i$. Общее решение записывается в виде:

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

| **Общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами** | | |
|---|---|---|
| Корни характеристического уравнения | Дискриминант характеристического уравнения | Общее решение |
| Корни $k_1$, $k_2$ действительные и различные | $D > 0$ | $y(x) = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$ |
| Корни $k_1$, $k_2$ действительные и равные | $D = 0$ | $y(x) = (C_1x + C_2)e^{k_1x}$ |
| Корни $k_1$, $k_2$ комплексные: $k_1 = \alpha + \beta i;$ $k_2 = \alpha - \beta i$ | $D > 0$ | $y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$ |

**Пример 1.**

Решить дифференциальное уравнение: $y'' - 6y' + 5y = 0$.

***Решение.***

Запишем сначала соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^2 - 6k + 5 = 0.$$

Корни данного уравнения равны $k_1$=1, $k_2$=5.

Поскольку корни действительны и различны, общее решение будет иметь вид: $y(x) = C_1 e^x + \ C_2 e^{5x}$, где $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные.

**Пример 2.**

Решить дифференциальное уравнение: $y'' + 25y = 0$.

***Решение.***

Запишем сначала соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^2 + 25 = 0.$$

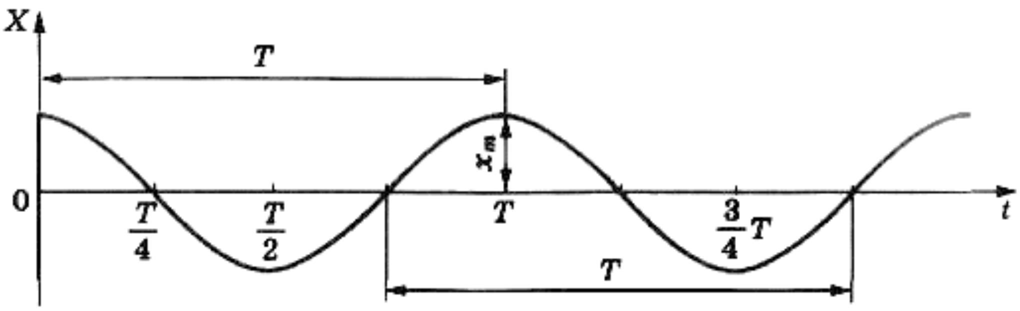
Корни этого уравнения являются чисто мнимыми: $k^2$ = -25, → $k_1$ = 5i, $k_2$ = -5i.

Тогда ответ записывается в следующем виде:

$y(x) = C_1 \cos(\, 5\mathrm{x} + C_2 \sin(5\mathrm{x})$, где $C_1$ и $C_2$ - постоянные интегрирования

### 2.4.2 Гармонические колебания

Периодические изменения физической величины в зависимости от времени, происходящие по закону синуса или косинуса, называются **гармоническими колебаниями**.




Дифференциальное уравнение гармонических колебаний: $\boldsymbol{x'' + \omega_0^2 x = 0}$.

Общее решение дифференциального уравнения гармонических колебаний:

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t, \ \ C_1, C_2 - const,$$

$$x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)} = \ A\cos(\omega_0 t + \varphi) x = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

где $x$ – смещение колеблющейся точки от положения равновесия;

$t$ – время;

$A$ – соответственно амплитуда;

$\omega_0$ − угловая частота;

$\varphi -$ начальная фаза колебаний;

$(\omega_0 t + \varphi) -$ фаза колебаний в момент *t*.

Угловая частота колебаний: $\omega_0 = 2\pi v,$ или $\omega_0 = \frac{2\pi}{\mathrm{T}},$

где $\omega_0$ и $\mathrm{T} -$ частота и период колебаний.

Скорость точки, совершающей гармонические колебания:

$$v = x' = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Ускорение при гармоническом колебании:

$$a = x'' = -A\omega_0^2 \cos\,(\sin(\omega_0 t + \varphi).$$

**Пример 3.**

Пружина массой 2 *кг* имеет собственную длину 0.5 *м*. Сила в 25.6 *N* требуется для её растягивания до длины 0.7 *м*. Если пружина растянута на 0.7 м, а затем выпущена с начальной скоростью 0, найти положение массы в любой момент времени *t*.

***Решение.***

$$k(0.2) = 25.6 \quad \rightarrow \quad 2\frac{d^2x}{dt^2} + 128x = 0 \quad \rightarrow \quad x(t) = C_1 \cos 8t + C_2 \sin 8t$$

Первоначальные условия: $x(0) = 0.2 \quad \rightarrow \quad x(0) = C_1 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0.2$

Первоначальная скорость:

$$x'^{(t)} = -8C_1 \sin 8t + 8C_2 cos8t \quad \rightarrow \quad x'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0.$$

***Ответ:*** $x(t) = \frac{1}{5}cos8t.$

**Пример 4.**

Частица совершает простое гармоническое движение. Отклонение от центра колебания частицы равно *x* метрам в момент времени *t* секунд.

***a)*** Покажите, что функция *x* = *A*cos10*t* + *B*sin10*t* является общим решением дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 100x = 0.$$

***b)*** Частное решение дифференциального уравнения при $t = \frac{1}{10}\pi$ такое, что *x*= -2 и $\frac{dx}{dt}$=10. Найдите значение *A* и значение *B*, определите это частное решение.

***Решение.***

$a$) Находим

$$\frac{dx}{dt} = -10Asin10t + 10Bcos10t \text{ и } \frac{d^2x}{dt^2} = -100A\cos 10t - 100B\sin 10t.$$

Выполняем подстановку: $\frac{d^2x}{dt^2} + 100x = 0.$

$$-100(Acos10t - 100Bsin10t) + 100x = 0.$$

$$-100x + 100x = 0.$$

В результате получили тождество, а это означает, что функция $x = A\cos 10t + B\sin 10t$ является решением указанного дифференциального уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + 100x = 0$. Подставляем $\frac{\pi}{10}$ в $x$ : $A\cos\pi + B\sin\pi = -2$ и получаем $A = 2$.

Подставляем $\frac{\pi}{10}$ в $\frac{dx}{dt}$ : $-10A sin\pi + 10B cos\pi = 10$ и получаем $B = -1$

***Ответ:*** $x = 2\cos 10t - \sin 10t$- *частное решение.*

### Упражнения

**Уровень А.**

**Пример 5.**

Заполнить таблицу решения дифференциального уравнения вида $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$, если известно его характеристическое уравнение.

| **Характеристическое уравнение** | **Корни характеристического уравнения** | **Решение** |
|---|---|---|
| $m^2 + 6m + 8 = 0$ | m = -2, -4 | |
| $m^2 - 1 = 0$ | m = ± 1 | |
| $m^2 - 2m + 1 = 0$ | m = 1 | |
| $m^2 + 4 = 0$ | m = ± 2i | |
| $m^2 + 10m + 25 = 0$ | m = -5 | |
| $m^2 - 12m + 45 = 0$ | m = 6 ± 3i | |
| $m^2 + 10 = 0$ | m = ± √10 i | |
| $m^2 + 2m + 5 = 0$ | m = -1 ± 2i | |

***Ответ:***

| **Характеристическое уравнение** | **Корни характеристического уравнения** | **Решение** |
|---|---|---|
| $m^2 + 6m + 8 = 0$ | m = -2, -4 | $y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^{-2x}$ |
| $m^2 - 1 = 0$ | m = ± 1 | $y(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-x}$ |
| $m^2 - 2m + 1 = 0$ | m = 1 | $y(x) = (C_1x + C_2)e^{x}$ |
| $m^2 + 4 = 0$ | m = ± 2i | $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ |
| $m^2 + 10m + 25 = 0$ | m = -5 | $y(x) = (C_1x + C_2)e^{-5x}$ |
| $m^2 - 12m + 45 = 0$ | m = 6 ± 3i | $y(x) = e^{6x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ |
| $m^2 + 10 = 0$ | m = ± √10 i | $y(x) = C_1 \cos \sqrt{10}x + C_2 \sin \sqrt{10}x$ |
| $m^2 + 2m + 5 = 0$ | m = -1 ± 2i | $y(x) = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ |

**Пример 6.**

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

***Ответ:*** $y(x) = (C_1x + C_2)e^{3x}$, где $C_1$ и $C_2$ – произвольные действительные числа.

**Пример 7.**

Решить дифференциальное уравнение: $y'' + 4y' + 5y = 0.$

***Ответ:*** $y(x) = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$,
где $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные.

**Пример 8.**

Определите период, частоту и амплитуду колебания.

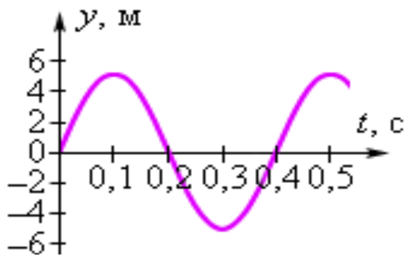



*Рис. 1.*

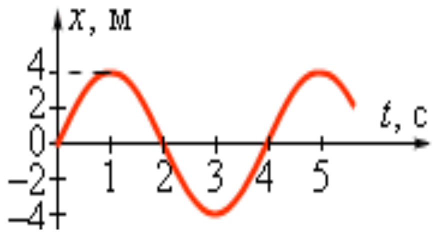



*Рис. 2.*

***Ответ:*** *Рис. 1.* A= 5 м, T= 0,4 с, υ= 2,5 Гц;
*Рис.2* A= 4 м, T= 4 с, υ= 0,25 Гц.

**Пример 9.**

Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A$ = 4 *см* и периодом $T$ = 2 *с*. Напишите уравнение движения точки, если её движение начинается из положения $x_0 = 2$ см.

***Ответ:*** $x = 0.04 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, м.

**Пример 10.**

Напишите уравнение гармонического колебания точки, если его амплитуда $A$ = 15 *см*, максимальная скорость колеблющейся точки $\omega_{max} = 30$ см/с, начальная фаза $\varphi = 10^0$.

***Ответ:*** $x = 0.15 \cos\left(2t + \frac{\pi}{18}\right)$, м.

**Пример 11.**

Материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0.02\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, м. Определите:

1) амплитуду колебаний;
2) период колебаний;
3) начальную фазу колебаний;
4) максимальную скорость точки;
5) максимальное ускорение точки;
6) через сколько времени после начала отсчета точка будет проходить через положение равновесия.

***Ответ:*** ***1)*** *A=2см;* ***2)*** *T=2с;* ***3)*** $\varphi = \frac{\pi}{2}$; **4**) $v_{max} = 6.28$;
**5**) $a_{max} = 19.7$ см/с$^2$; ***6)*** $t = m\ c$, где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

**Пример 12.**

Спиральная пружина обладает жёсткостью $k$ =25 $Н/$м. Определите, тело какой массы *m* должно быть подвешено к пружине, чтобы за *t* =1 *мин* совершалось 25 колебаний.

***Ответ:*** *m = 3.65 кг.*

**Пример 13.**

Если увеличить массу груза, подвешенного к спиральной пружине, на 600 *г*, то период колебаний груза возрастает в 2 раза. Определите массу первоначально подвешенного груза.

***Ответ:*** *m = 200 г.*

**Пример 14.**

Период колебаний материальной точки 2.4 *с*, амплитуда 5 *см*, начальная фаза равна нулю. Каковы смещение, скорость и ускорение колеблющейся точки через 0,4 *с* после начала колебаний? Колебания происходят по закону косинуса.

***Ответ:*** $x = 2.5 \cdot 10^{-2}$м; $v_x = 0.11$ м/с; $a_x = -0.17$ м/с$^2$.

**Пример 15.**

Материальная точка, совершающая гармонические колебания с частотой $v = 1$ Гц, в момент времени $t = 0$ проходит положение, определяемое координатой $x_0 = 5$см, со скоростью $v_0 = 15$ см/с. Определить амплитуду колебаний.

***Ответ:*** А $=$ 5,54 см.

**Уровень B.**

**Пример 16.**
Решить уравнение: $y'' + 4iy = 0$.

***Ответ:*** общее решение дифференциального уравнения будет выражаться в виде линейной комбинации экспоненциальных функций:

$$y(x) = C_1 e^{(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)x} + C_2 e^{(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)x},$$

где $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные.

**Пример 17.**
Предположим, что пружина в примере: 3, погружена в жидкость с убывающей постоянной ***b = 40***. Найти положение массы в любой момент времени *t*, если она исходит из положения равновесия и дается толчок, чтобы начать его с начальной скоростью 0,6 м/с.

***Ответ:*** $2\frac{d^2x}{dt^2} + 40\frac{dx}{dt} + 128x = 0, \quad x(t) = 0.05(e^{-4t} - e^{-16t})$.

**Пример 18.**
Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний маятника имеет вид $\frac{d^2x}{dt^2} = -16x$

a) Покажите, что функция $x(t) = Asin(4t + \alpha)$ является решением данного уравнения.
b) Пусть в начальный момент времени отклонение маятника из положения равновесия равно $\sqrt{3}$, а начальная скорость равна 4.
Найдите решение уравнения, удовлетворяющее заданным условиям.

***Ответ:*** **a)** $x'(t) = 4A\cos(4t + \alpha); \quad x''(t) = -16A\sin(4t + \alpha);$

$$-16A\sin(4t + \alpha) = -16x;$$

$$x(t) = A\sin(4t + \alpha) \quad \rightarrow \quad -16x = -16x.$$

***b***) $x(t) = 2sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$.

**Пример 19.**
Частица совершает простое гармоническое движение. Отклонение от центра колебания частицы равно *x* метрам за время *t* секунд.

***a)*** Покажите, что $x = A\cos 5t + B\sin 5t$ является общим решением дифференциального уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + 25x = 0$.

***b)*** $x = 2$ при $t = \dfrac{1}{10}\pi$, а $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{2}$ при $t = \dfrac{1}{20}\pi$.

Найдите значение $A$ и значение $B$.

***c)*** Покажите, что $x = \dfrac{9}{5}\sqrt{2}$ при $t = \dfrac{1}{20}\pi$.

***d)*** Найдите наименьшее положительное значение $t$, при котором скорость частицы равна нулю. Округлите свой ответ с точностью до тысячных.

***Ответ:*** ***a***) Получает характеристическое уравнение. Получает два корня (±5i). Получил ответ $A\cos(5t) + B\sin(5t)$;

***b***) Подставляет $\frac{\pi}{10}$ в выражение для $x$ и получает $B = 2$.

Подставляет $\frac{\pi}{20}$ в выражение для $\frac{dx}{dt}$ и получает $A = \frac{8}{5}$;

***c***) Подставляет $\frac{\pi}{20}$ в выражение для $x$. Получает $\frac{9\sqrt{2}}{5}$;

***d***) Получает $\operatorname{tg} 5t = k$. Получает $\operatorname{tg} 5t = \frac{5}{4}$. Использует верный порядок действий для решения $\operatorname{tg} 5t = k$..Получает $t = 0{,}179$.

**Пример 20.**

Частица совершает простое гармоническое движение. Движение частицы представлено дифференциальным уравнением: $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$, где $x$-смещение от центра $O$, $t$ – время. ($x$ измеряется в метрах, а $t$ – в секундах)

***a)*** **(i)** Учитывая, что $x = 0$ при $t = 0$, а максимальное значение $x$ равно 2, решите дифференциальное уравнение и найдите зависимость $x$ от $t$.

**(ii)** Покажите, что при $t = \frac{5\pi}{12}$ смещение частицы от $O$ равно $-\sqrt{2}$.

***b***) В момент времени $t = \frac{5\pi}{12}$ частица прекращает движение. Затем она начинает двигаться в направлении к $O$ простым гармоническим движением, представленным тем же дифференциальным уравнением, которое дано выше. Найдите скорость частицы спустя $\frac{\pi}{12}$ секунд.

***Ответ:*** **a)** (i) $x = C_1 cos3t + C_2\sin 3t,\ x(0) = 0,\ C_1 = 0,\ A = 2$
поэтому $C_2 = 2, \quad x(t) = 2\sin 3t$;

$(ii)\ x\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2\sin\frac{15\pi}{12} = 2\sin\frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}.$

***b***) $x(t) = -\sqrt{2}cos3t + C_2 sin3t \quad \rightarrow \quad x'(t) = 3\sqrt{2}sin3t + 3C_2 cos3t$

$t = 0, x'(0) = 0,$ то $C_2 = 0 \ \rightarrow \ x = -\sqrt{2}cos3t \ \rightarrow \ x'(t)3\sqrt{2}sin3t$

$x'^{\left(\frac{\pi}{12}\right)} = 3\sqrt{2}sin\frac{\pi}{4} \quad \rightarrow$ отсюда скорость равна 3 м/с.

**Пример 21.**

Пружина с грузом массой 2 *кг*, имеющая постоянную затухания 14, под действием силы в 6 *Н* растягивается на 0,5 *м* от своей начальной длины. Пружина растягивается на 1 *м* от своей начальной длины, а затем отпускается с нулевой скоростью. Найдите положение груза в произвольный момент времени *t.*

***Ответ:*** $x(t) = -\frac{1}{5}e^{-6t} + \frac{6}{5}e^{-t}$.

**Пример 22.**

Составьте уравнение гармонических колебаний тела, если его максимальное ускорение равно по модулю 1,6 *м/с*$^2$, период колебаний 1 *с*, а смещение из состояния равновесия в начальный момент времени составляет 2 *см*.

***Ответ:*** $x = 4 \cdot 10^{-2} \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ м.

**Пример 23.**

Амплитуда гармонического колебания А=5*см*, период Т=4*с*. Найти максимальную скорость $v_{max}$ колеблющейся точки и её максимальное ускорение $a_{max}$.

***Ответ:*** $v_{max} = \frac{2\pi}{T}A = 7{,}85 \cdot 10^{-2}$ м/с и $a_{max} = \left|-\frac{4\pi^2}{T^2}A\right| = 0{,}12$ м/с$^2$.

**Пример 24.**

Тело массой 20 *г* совершает гармонические колебания с амплитудой 5 *см* и частотой 20 *Гц*. Определите полную энергию колебаний, а также мгновенные значения проекций скорости и ускорения и координаты тела, если в начальный момент времени оно находилось в положении равновесия.

***Ответ:*** $x = 0{,}05 sin 40\pi t$ (м); $v_x \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20\text{Гц} \cdot 0{,}05\text{м} \cdot \cos 40\pi t =$
$= 6{,}28 \cos 40\pi t$ (м/с);
$a_x \approx -4 \cdot 3{,}14^2 \cdot (20\text{Гц})^2 \cdot 0{,}05\text{м} \cdot sin 40\pi t = -789 sin 40\pi t$ (м/$c^2$);
$W \approx 2 \cdot 3{,}14^2 \cdot (20\text{Гц})^2 \cdot (0{,}05\text{м})^2 \cdot 0{,}02\text{кг} \approx 0{,}9$ Дж.

**Пример 25.**

В момент $t = 0$ частица начинает двигаться вдоль оси $x$ так, что проекция её скорости меняется по закону $v_x = 35 \cos \pi t$ см/с, где $t$ в секундах. Найти путь, который пройдет эта частица за первые $t = 2{,}80$ с после начала движения.

***Ответ***: $S = 0{,}6$ *м.*

## Список литературы


1. Аксененко Е.М. Применение дифференциальных уравнений к решению задач: практикум/У.М. Аксиненко, Г.М. Чуванова. – Южно-Сахалинск, изд-во СахГУ, 2013. – 52 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис Пресс, 2009.
3. Derrick W.R., Grossman S.I. Elementary differential equations with applications.-2-nd ed.- Reading. Mass.: Addison-Wesley, 2017.-532 p.
4. Braun M., Differential equation models/Ed.:-New York ctc.: Springer, 2016-380p.
5. Королев А.В. Курс дифференциальных и разностных уравнений. М.: ГУ ВШЭ, 2011.
6. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов. М.: Физматлит, 2012.
7. Панюкова Т.А. Основы теории дифференциальных уравнений для экономистов. М.: Либроком, 2011.
8. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: ЛКИ, 2008.
9. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения. М.: ЛКИ, 2008.
10. Михеев А.В. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Санкт-Петербург, 2012.
11. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями/ А.И. Егоров. – М.: Физматлит, 2005.
12. Ельцов А.А. Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения/ А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова. –Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники, 2007.