Дифференциалдық теңдеулер.
Жалпы және дербес шешімдер

Оқу мақсаты:

- 12.5.1.1 дифференциалдық теңдеулер туралы жалпы түсіну;
- 12.5.1.2 дифференциалдық теңдеулердің дербес және жалпы шешімдерінің анықтамасын білу;

Сабақ мақсаты:

- Дифференциал теңдеу ұғымын;
- дифференциалдық теңдеу анықтамасын;
- дифференциалдық теңдеудің ретін;
- жалпы және дербес шешімін табу туралы жалпы мағлұмат енгізу.

Интегралдар кестесі.

Қайталаймыз.

1) $\int 0dx = C, \quad C - const$

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

Дербес жағдайда: $\int dx = x + C$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

Дербес жағдайда : $\int e^x dx = e^x + C$

5) $\int \cos x dx = \sin x + C$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

8) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

9) $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

Дербес жағдайда: $$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C$$

10) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} + C, \quad a \neq 0$$

Дербес жағдайда: $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$$

11) $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C \quad a \neq 0$$

12) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Анықтама.

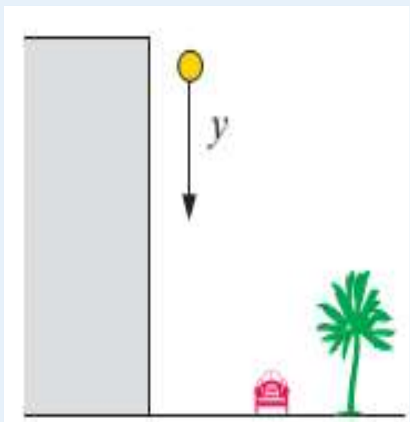
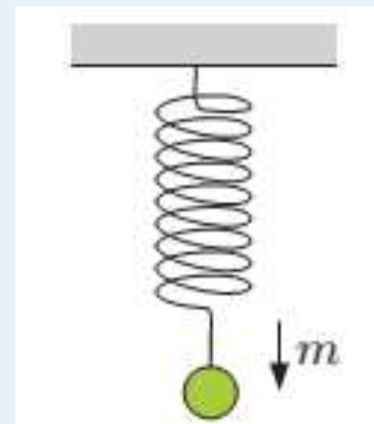
Дифференциалдық теңдеу деп, тәуелсіз айнымалы х –ты берілген $y = y(x)$

функциясымен және оның туындысымен байланыстыратын теңдеуді айтамыз, яғни

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

түріндегі теңдеу

Дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын жағдайлар мысалдары:

Ауа ортасындағы дененің құлауы		*Серпімді күш әсерінен жүктің тербелесуі*
Құлап бара жатқан объект	*Парашютші*	
		
$\frac{d^2y}{dt^2} = 9{,}8$	$\frac{d\upsilon}{dt} = g - \frac{k}{m}\upsilon$	$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$

Дифференциалдық теңдеулер мысалдары:

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

$$xy' + y = y^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

Анықтама

Дифференциалдық теңдеудің реті деп, құрамына кіретін ізделінді функцияның ең жоғарғы туындысының ретін айтады.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі:

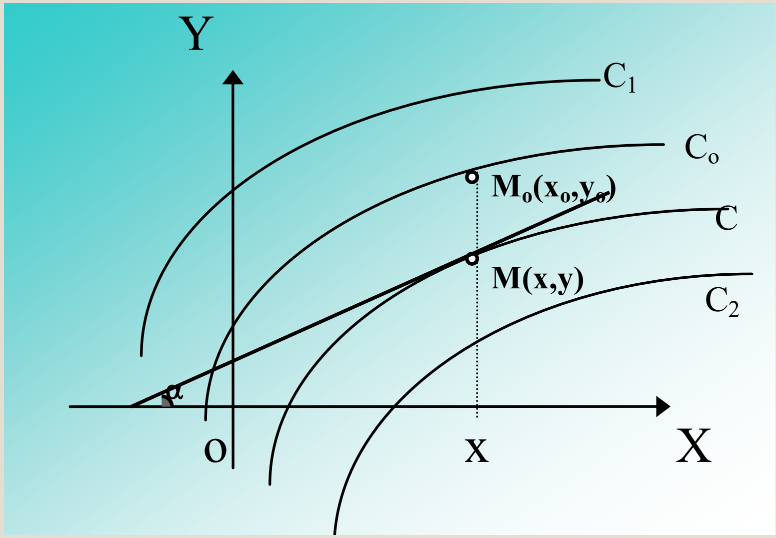
$$F(x, y, y') = 0$$

Анықтама

Дифференциалдық теңдеудің *шешімі* деп, теңдеуге қойғанда оны дұрыс теңдікке айналдыратын қандай да бір функцияны айтамыз.

- Дифференциалдық теңдеудің шешімінің графигі осы теңдеудің интегралдық қисығы деп аталады.

Геометриялық түрде жалпы шешім интегралдық қисықтар жиынтығын құрайды.



Алгебралық теңдеу мен дифференциалдық теңдеудің айырмашылығы

1**) Алгебралық теңдеу**– х және у айнымалылар арасындағы тәуелділік.

Дифференциалдық теңдеу $-x, y, y'$ айнымалылар арасындағы тәуелділік.

2) Алгебралық теңдеудің шешімі - сан.

Дифференциалдық теңдеудің шешімі – функция.

3) Дифференциалдық теңдеу интегралдау арқылы шешіледі.

Тапсырма

- Теңдеудің ретін анықтаңдар:

$$12x^4 + yy' = 3$$

$$y'' + 7y''' + 1 = 0$$

Мысалы, $y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} + C$ (C – const.) функциясы $y' = \frac{x^4-1}{x^3}$ теңдеуінің шешімі болады.

Шынында да, $y' = x - \frac{1}{x^3} = \frac{x^4-1}{x^3}$.

Анықтама

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің *жалпы шешімі* деп, келесі функцияны айтамыз

$$y = \varphi(x, C)$$

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің *дербес шешімі* деп, кездейсоқ C тұрақтысының қандай да бір нақты мәнінде жалпы шешімнен алынатын шешімді айтады.

Егер дифференциалдық теңдеуден басқа $y(x_0) = y_0$ түрдегі бастапқы шарты берілсе, онда осындай есеп *Коши есебі* деп аталады.

1. $y'' + y = 0$ дифференциалдық теңдеу берілген. $y = \sin x$ функциясы осы теңдеудің шешімі болатындығын/болмайтындығы тексеріңіз.

2. $y(x) = e^x - x - 1$ берілген. $y(x)$ функциясы $y' = x + y$ дифференциалдық теңдеудің шешімі болатынын көрсетіңіз.

3. $y = Ce^{3x}$ функциясы $y' - 3y = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі болатынын көрсетіңіз.

1 тапсырма. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

a) $y' = e^{-3x}$; b) $y' = \frac{x}{2} + tgx$; c) $e^{y'} = 1$; d) cosy' = 1

Жауаптары: a) b) ; c) d)

2-тапсырма. $y(x) = e^x - x - 1$ функциясы $y' = x + y$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімі болатындығын көрсетіңіз.

3-тапсырма. $y = Ce^{3x}$ функциясы $y' - 3y = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімі болатындығын көрсетіңіз. Оның $y(1) = e^3$ шартын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

1) Дифференциалдық теңдеуді шешіңіз:

A) $y^{/} = 3 - 4x;$

B) $y^{/} = 6x^2 - 8x + 1;$

C) $y^{/} = 3e^{2x};$

D) $y^{/} = 4cos2x;$

E) $y^{/} = 3sinx;$

F) $y^{/} = cosx - sinx.$

2) Теңдеулердің бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз

A) $y^{/} = \boldsymbol{sinx},\ \ \boldsymbol{y(0) = 0;}$

B) $y^{/} = \boldsymbol{2cosx},\ \ \boldsymbol{y(\pi) = 1;}$

C) $y^{/} = \boldsymbol{3x^2 + 4x - 1},\ \ \boldsymbol{y(1) = -2\ ;}$

D) $y^{/} = \boldsymbol{2 + 2x - 3x^2},\ \ \ \boldsymbol{y(-1) = 2;}$

E) $y^{/} = \boldsymbol{e^x},\ \ \ \ \ \ \ \boldsymbol{y(1) = 1;}$

F) $y^{/} = \boldsymbol{e^{-x}},\ \ \ \ \ \ \ \boldsymbol{y(0) = 2.}$

Жеке жұмыс

Тапсырма

1. Функцияның туындысын табыңыз:

- а) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 12x + 5$
- б) $f(x) = \frac{x^3}{6} - 3x^2 - 14x + 3$

- 2. $f(x) = \frac{6}{(4-3x)^2}$ функциясының алғашқы функциясын
- табыңыз, егер $F(1{,}5) = 1$ болса.

- 3. $f(x) = 3x^2 - \frac{x}{2} - 5;$ $F(-2) = -5$ екені белгілі болса,
- $F(-1)$ −ді табыңыз

<u>А деңгейі</u>

1 тапсырма. $v = 20e^{-2t} + 5$ функциясы $\frac{dv}{dt} = 10 - 2v$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімі екенін дәлелдеңіз.

2 тапсырма. Дене температурасының Т өзгеруінің математикалық моделі $\frac{dv}{dt} = 2 - 0{,}1\,T$ дифференциалдық теңдеуімен сипатталады, $\mathrm{T} = 20 + 60e^{-0{,}1t}$ функциясы дифференциалдық теңдеудің шешімі екенін көрсетіңіз.

3 тапсырма. Теңдеудің екі жағын интегралдау арқылы $\frac{dy}{dx} = 3\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} + 1$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз. у (1) = 4 шартын қанағаттандыратын теңдеудің дербес шешімін табыңыз.

Жауабы: $y = x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 2{,}5$

Пример 2.

Решить дифференциальное уравнение $\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot y' = 2.$

Ответ: $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = 2\sqrt{x} - 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C.$

1. Показать, что заданные функции являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений:

a) $x^2 + 2xy = C, (x+y)dx + xdy = 0;$

b) $y - x = Ce^y, (x - y + 1)y' = 1;$

c) $y = Ce^{x^3}, dy - 3x^2ydx = 0;$

d) $y' = 3x + y + 5; y(x) = e^x - 3x - 8.$

4. Показать, что функция *y(x)* является решением задачи Коши.

a) $x + y - 2 + (1-x)y' = 0, y(2) = 1; y(x) = 1 + (x-1)\ln(x-1);$

b) $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1),\ y(2) = 6; y(x) = \frac{x}{x-1} + x^2;$

c) $xy' = y(lny - lnx),\ y(-0,5) = -0,5; y(x) = xe^{1+2x}.$

Рефлексия

- *нені білдім, нені үйрендім*
- *нені толық түсінбедім*
- *немен жұмысты жалғастыру қажет*