Дифференциалдық теңдеулердің классификациясы

Оқыту мақсаттары

12.5.1.4	дифференциалдық теңдеулерді классифициялау: айнымалылары бөлінетін, біртекті, бірінші реттік сызықтық теңдеулер;

Бағалау критерийлері

- дифференциалдық теңдеу мен оның шешімдерінің анықтамаларын біледі;
- айнымалылары бөлінетін (ажыратылатын) дифференциялдық теңдеулерді шешу алгоритмін біледі;
- айнымалылары бөлінетін (ажыратылатын) дифференциалдық теңдеулердің жалпы және дербес шешімдерін табады.

І ретті дифференциалдық теңдеулерді шешу тәсілдері.

Айнымалысы ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер.

Анықтама : $M(x,y)dy + N(x,y)dx = 0$ түрінде берілген дифференциалдық теңдеу айнымалысы ажыратылатын дифференциалдық теңдеу деп аталады егер:

$$M(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$$

$$N(x,y) = X_1(x)\cdot Y_1(y)$$

Шешу әдісі:

$$X(x)\cdot Y(y)dy + X_1(x)\cdot Y_1(y)dx = 0$$ | :X(x)≠0

| :Y(y)≠0

$$\frac{Y(y)}{Y_1(y)}dy + \frac{X_1(x)}{X(x)}dx = 0$$

Теңдіктің екі жағын да интегралдаймыз:

$$\int \frac{Y(y)}{Y_1(y)}dy + \int \frac{X_1(x)}{X(x)}dx = 0$$ общий

Айнымалысы ажыратылатын дифференциалдық теңдеулерді шешу алгоритмі.

- Туынды белгісін дифференциал арқылы алмастыру.
- Бірдей дифференциалдық теңдеу мүшелерін ықшамдау.
- Айнымалыларын ажырату.
- Теңдіктің екі жағын да интегралдап жалпы шешімін табу.
- Егер қосымша шарттар берілсе дербес шешімін табу.

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)}\mathrm{d}x = \ln\left|\mathrm{f}(x)\right| + c$$

2-мысал. $(1+x^2)dy - xydx = 0$ теңдеуі берілген. Оның барлық шешімдерін табу керек.

2-мысал. $(1+x^2)dy - xydx = 0$ теңдеуі берілген. Оның барлық шешімдерін табу керек.

Шешуі: Берілген теңдеу – айнымалылары ажыратылатын теңдеу. Оны $(1+x^2)y$ көбейтіндісіне мүшелеп бөлеміз:

$\frac{dy}{y} - \frac{x}{1+x^2}dx = 0.$ Енді интегралдаймыз: $\int \frac{dy}{y} - \int \frac{xdx}{1+x^2} = C_1,$ яғни

$\ln|y| - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| = \ln|C|,$ (мұнда C_1 тұрақтысы $\ln|C|$ - мен ауыстырылған). Бұдан

$\ln|y| - \ln\sqrt{1+x^2} = \ln|C| \Rightarrow \ln|y| = \ln|C|\sqrt{1+x^2} \Rightarrow y = |C|\sqrt{1+x^2};$ Ал бұдан жалпы шешімді аламыз: $y = C\sqrt{1+x^2}.$

Сол сияқты $(1+x^2)y = 0$ теңдеуін де қарастырамыз. Бірақ бұл теңдеудің шешімі (y=0) берілген теңдеудің ерекше шешімі болмайды, себебі ол C=0 болғанда жалпы интегралдан алынады.

Жауабы: $y = C\sqrt{1+x^2},$ мұндағы C – кез келген тұрақты.

Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

- 1. $\frac{dx}{dt} = \sqrt{x}$ 2. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-1}{x}$

Жұптық жұмыс

а) дифференциальдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$y(2) = 6$ үшін дербес шешімін табыңыз.

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

ә) дифференциальдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$x + yy' = 0$$

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

а) дифференциальдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

ә) $y(2) = 6$ үшін дербес шешімін табыңыз.

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{f(x)} \cdot \underbrace{y}_{g(y)}$$

$$f(x) \cdot g(y)$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|y| = \ln|x+1| + \ln|C| = \ln|C(x+1)|$$

$$y = C(x+1)$$ жалпы шешім

Дербес шешім:

$$6 = C(2+1) \qquad C = 2$$

$$y = 2(x+1)$$

ә) $x + yy' = 0$

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \Big| * dx$$

$$xdx + ydy = 0$$

$$\int xdx + \int ydy = 0$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

Жауабы: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$

Есептер шығару

Дифференциалдық теңдеуді шешіңіз

[illegible]

1. $(x+1)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0$

Теңдіктің екі жағын да $(x+1)^3 (y-2)^2$ өрнегіне бөлеміз. .

$$\frac{dy}{(y-2)^2} - \frac{dx}{(x+1)^3} = 0$$ Екі жағын да интегралдаймыз:

$$\int \frac{dy}{(y-2)^2} - \int \frac{dx}{(x+1)^3} = C \quad (C = const)$$

$$\int (y-2)^{-2} d(y-2) - \int (x+1)^{-3} d(x+1) = C$$

$$-\frac{1}{y-2} + \frac{1}{2(x+1)^2} = C$$ - жалпы интеграл

2. Дифференциалдық теңдеуді шешіңіз. $y = y' e^{2x}$

2. $y = y'\cos^2 x \ln y$

Шешуі:

$$y = \frac{dy}{dx}\cos^2 x \ln y \quad | \cdot dx$$

$$y\,dx = \cos^2 x \ln y\,dy \quad | \quad : y\cos^2 x \neq 0$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = \ln y \cdot \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\ln y\,dy}{y} =$$

$$\mathrm{tg}\,x = \int \ln y\,d(\ln y) \Rightarrow \mathrm{tg}\,x = \frac{1}{2}\ln^2 y + C$$

3. Теңдеуді шешіңіз. $(y+xy)dx+(x-xy)dy=0$

3. $$(y+xy)dx+(x-xy)dy=0$$

Шешуі:

$$y(1+x)dx+x(1-y)dy=0 \quad |:(yx)$$

$$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0 \Rightarrow \int\frac{1+x}{x}dx+\int\frac{1-y}{y}dy=C \Rightarrow$$

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=C \Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int dx+\int\frac{dy}{y}-y=C \Rightarrow$$

$$\ln|x|+x+\ln|y|-y=C$$

4. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табыңыз.

$$y dx + \operatorname{ctg} x \cdot dy = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1.$$

4. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табыңыз.

Шешуі:

$$y\,dx + \operatorname{ctg}x \cdot dy = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1.$$

$$y\,dx + \operatorname{ctg}x \cdot dy = 0 \qquad | : \left(y\operatorname{ctg}x \neq 0\right)$$

$$\frac{dx}{\operatorname{ctg}x} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \int \operatorname{tg}x\,dx + \int \frac{dy}{y} = C \quad \Rightarrow$$

$$-\ln|\cos x| + \ln|y| = C \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{\cos x}\right| = C \Rightarrow$$

$$\left|\frac{y}{\cos x}\right| = e^{c} \Rightarrow \left|\frac{y}{\cos x}\right| = C_1 \Rightarrow \frac{y}{\cos x} = \pm C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{y}{\cos x} = C_2 \;\; \Rightarrow \;\; y = C_2 \cos x$$ - жалпы шешім

$$\left(C_1 = e^c \;, C_2 = \pm C_1\right).$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \;\; y = -1$$

$$-1 = C_2 \cos\frac{\pi}{3} \;\; \Leftrightarrow \;\; C_2 = -2$$

$$y = -2\cos x$$ дербес шешім.

Атауы	Шығару тәсілі
Айнымалылары бөліктенетін дифференциалдық теңдеу. $y' = f(x)g(y)$	Осындай теңдеуді шешу үшін оның екі бөлігін, бір бөлігіне тек ғана x кіретіндей, ал басқасына тек ғана y, өрнекке көбейту немесе бөлу керек, содан кейін екі бөлігін интегралдау керек.
Біртекті дифференциалдық теңдеу $y' = f(y/x)$	Осындай теңдеулерді шешу үшін $y = t(x)\cdot x$, мұнда $t(x)$ - жаңа ізделетін функция, алмастыру жасау керек.
Сызықтық дифференциалдық теңдеу $y' + P(x)y + Q(x) = 0$	Теңдеу екі айнымалылары бөліктенетін теңдеулерге ізденелетін функцияны қосымша екі u және υ (яғни $y = u\cdot\upsilon$) функциялардың көбейтіндісімен ауыстырып келтіріледі.

Үйге тапсырма

Айнымалысы ажыратылған дифференциалдық теңдеулерді шешіңіз.

Решить уравнения (1–11):

1. $y' \cos x = \frac{y}{\ln y}$, $y(0) = 1$.

2. $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$.

3. $(1 + x^2)dy + ydx = 0$, $y(1) = 1$.

4. $\frac{yy'}{x} + e^y = 0, y(1) = 0$.

5. $e^{1+x^2} \operatorname{tg} y dx - \frac{e^{2x}}{x-1} dy = 0$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

6. $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx, y(0) = 0$.

7. $y' + \cos(x + 2y) = \cos(x - 2y)$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

8. $\frac{y}{y'} = \ln y$, $y(2) = 1$.

9. $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$.

10. $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$.

11. $y' = \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{a^2 - x^2}}$.

Жауаптары

1. $\frac{1}{2}\ln^2 y = \ln \operatorname{tg}\left|\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right|$. **2.** $\sin y \cos x = C$. **3.** $y = e^{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg} x}$. **4.** $2e^{-y}(y+1) = x^2+1$. **5.** $2\ln|\sin y| = e^{(x-1)^2}-1$. **6.** $\operatorname{arctg} e^x = \frac{y^3}{3}+\frac{\pi}{4}$. **7.** $\ln|\operatorname{tg} y| = 4(1-\cos x)$. **8.** $2(x-2) = \ln^2 y$. **9.** $2\sin x + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right| = C$, $y = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **10.** $y = \ln \operatorname{tg}(e^x + C)$. **11.** $y = a\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}+C\right)$, $y = \pm a$.

Рефлексия

Бүгінгі сабақта не үйрендік?

Есептер сіздер үшін күрделі болды деп ойлайсыз ба?

Қай есеп күрделі болды ? Неге ?