1. Показать, что заданные функции являются решениями соответствующих
уравнений:

a) $y = lncosx, y' = -tgx$;

b) $y = Csinx, y'tgx - y = 0$;

c) $y = Ce^{-3x}, y' + 3y = 0$.

**1. Показать, что заданные функции являются решениями соответствующих
дифференциальных уравнений:**

a) $x^2 + 2xy = C, (x + y)dx + xdy = 0$;

b) $y - x = Ce^y, (x - y + 1)y' = 1$;

c) $y = Ce^{x^3}, dy - 3x^2ydx = 0$;

d) $y' = 3x + y + 5; y(x) = e^x - 3x - 8$.

4. Показать, что функция y(x) является решением задачи Коши.

a) $x + y - 2 + (1 - x)y' = 0, y(2) = 1; y(x) = 1 + (x - 1)\ln(x - 1)$;

b) $x(x - 1)y' + y = x^2(2x - 1),\ y(2) = 6; y(x) = \frac{x}{x-1} + x^2$;

c) $xy' = y(lny - lnx),\ y(-0{,}5) = -0{,}5; y(x) = xe^{1+2x}$.

Уровень А.

1. Найти общие решения уравнений с разделяющимися переменными:

a) $x^3(y^2 - 1)dx + (1 + x^4)dy = 0$; **b)** $(x^2 + 2)y' = x\cdot \mathrm{tg}y$;

c) $(x + 5)dy - (y + 1)xdx=0$; **d)** $(x + 3)ydy + (y + 2)dx = 0$;

e) $(x^3 - 9)\sin y y' = x^2\cos y$; **f)** $x^2(1 + y^2)dx = y(2 + x^3)dy$;

g) $y' = \frac{2y+5}{2x-1}$; **h)** $x^3 y' + y^2 = 0$;

i) $y' \mathrm{tg}x = y - 2$; **j)** $xydx + (x + 1)dy = 0$.

Ответы:

a) $\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2 = \frac{C}{x^4+1}, y = -1$; ***b)*** $\sin y = C\sqrt{x^2 + 2}$;

c) $y = \frac{Ce^x}{(x+5)^5} - 1,\ x = -5$; ***d)*** $(x + 3)e^y = C(y + 2)^2,\ y = -2$;

e) $\cos y = \frac{C}{\sqrt[3]{x^3-9}}$; ***f)*** $(y^2 + 1)^3 = C(x^3 + 2)^2,\ x = -\sqrt[3]{2}$;

g) $y=\frac{C(2x-1)-5}{2}$; ***h)*** $y = \frac{2x^2}{2Cx^2-1},\ y = 0$;

i) $y = 2 + C\sin x$; ***j)*** $x = -1,\ y = C_1(x + 1)e^{-x}$.

2. Найти частный интеграл (решение) дифференциального уравнения, удовлетворяющий начальным условиям (решить задачу Коши):

a) $\frac{dy}{dx} + 4 = 12x,\ x = -2,\ y = 30$; ***b)*** $3y^2\frac{dy}{dx} = 2x + 1,\ x = 2,\ y = 2$;

c) $\frac{dy}{dx}sinx - y\,cosx = 0,\ x = \frac{\pi}{4},\ y = 1$; *d)* $e^y\frac{dy}{dx} + sinx = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 1$;

e) $2\sqrt{xy}dx = dy$, $y(1)=1$; *f)* $(1+x^3)y' = 3x^2y$, $y(0)=2$;

g) $(1+x^2)dx=xydy$, $y(2)=1$; *h)* $\frac{dy}{dx} = 6y^2x$; $y(1) = \frac{1}{25}$.

Ответы:

a) $y = 6x^2 - 4x + C$, $C = -2 \rightarrow y = 6x^2 - 4x - 2$;

b) $y^3 = x^2 + x + C$, $C=2 \rightarrow y^3 = x^2 + x + 2$;

c) $y = \sin x + C$, $C=0 \rightarrow y = \sin x$; *d)* $y=ln(cosx + C)$, $C=e \rightarrow y=ln(cosx + e)$;

f) $2\sqrt{y} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} = C,\ C = \frac{1}{3} \rightarrow 2\sqrt{y} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{1}{3}$;

g) $y=(1+x^3)C$, $C=2 \rightarrow y=2(1+x^3)$;

h) $y = \sqrt{2ln|x| + x^2 + C},\ C = \ln\frac{1}{4} - 3 \rightarrow y = \sqrt{ln\frac{x^2}{4} + x^2 - 3}$.

Уровень B.

1. Найти общие решения уравнений с разделяющимися переменными:

a) $(3 + \ln y)yxdx - (x^2 + 2)dy = 0$; *b)* $(e^{2x} + 5)y^2dy - (1 + y^3)e^{2x}dx = 0$;

c) $3x^2\sqrt{9 - y^2} = y'^{(1+x^6)}$; *d)* $3y' + 2 = \sqrt{2x + 3y - 4}$;

e) $3y' + 5 = (5x + 3y + 7)^3$; *f)* $2x^2yy' + y^2 = 2$;

g) $y'\cot^2 x + \tan y = 0$; ***h***) $(1 + e^x)y' = e^x$.

Ответы:

a) $\ln y = C\sqrt{x^2 + 2} - 3$; *b)* $(y^3 + 1)^2 = C(e^{2x} + 5)^3$;

c) $y = 3\sin(\operatorname{arctg} x^3 + C)$, $y = \pm 3$; *d)* $2\sqrt{2x + 3y - 4} = x + C$;

e) $-\frac{1}{2(5x + 3y + 7)^2} = x + C$; ***f***) $y^2 - 2 = Ce^{\frac{1}{x}}$, $C \in R$;

g) $ln|siny| + tanx - x = C,\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; ***h***) $y = ln\,(e^x + 1) + C$.

2. Найти общие решения уравнений методом замены параметра: (Уравнения вида $\boldsymbol{y' = f(ax + by + c)}$ сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными при помощи замены: **z**= $\boldsymbol{ax + by + c}$**).**

a) $y' = cos^2(x - y)$; ***b***) $y' = e^{x+2y}$;

c) $y' = \sqrt{2x + y + 1}$; ***d***) $y' = (10x + 5y + 1)^2$;

e) $y' = (x + y)^{10} - 1$; ***f)*** $(x + 2y)y' = 1,\ y(0) = -1$;

g) $y(1 + xy)dx = x(1 - xy)dy$;

h) $(x + y + 1)dx + (4x + 4y + 10)dy = 0$.

Ответы:

a) $y = x - arcctg(C - x)$; ***b)*** $y = 2e^{x-y} - C$;   ***c)*** $\sqrt{2x + y - 1} - 2\ln(\sqrt{2x + y - 1} + 2) = \frac{1}{2}x + c$; ***d)*** $\frac{\sqrt{2}}{2} arctg \frac{\sqrt{2}}{2}(10x + 5y + 1) = 5x + c$; ***e)*** $9(x + y)^9 = \frac{1}{C - x}$; ***f)*** $x + 2y + 2 = Ce^y \ \rightarrow \ x + 2y + 2 = 0$;

g) $ln\left|\frac{y}{x}\right| - xy + C = 0, \ x = 0$; ***h)*** $\frac{x}{2} + 2y - \ln|x + y + 3| + C = 0$.