

Проверь себя
Уровень А

1. Распределите следующие дифференциальные уравнения (номера могут повторяться):

a) $y' = x + 3$; b) $y' - 4y = 2x$; c) $y' = \frac{x + 2y}{3x}$; d) $y' = (2x + 1) \cdot x$;

e) $(x + 1)dy = (4y - 3)dx$; f) $e^{2x} \sin y dy = (x - 1)dx$; g) $y' = \frac{x+2y}{3x-y}$;

h) $x^2 y' = x^2 + 3xy$; i) $y' - x^2 - 4xy = 0$; j) $y' \sin x = \frac{y}{\ln y}$.

ДУ с разделяющимися переменными	Однородные ДУ	Линейные ДУ первого порядка

2. Найдите решение дифференциального уравнения:

a) $(x + 1)dy = ydx$;

f) $xy' = y + 2x^3$;

b) $y' + y = 0$;

g) $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$;

c) $y' + y = e^x$;

h) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$;

d) $y' = 3^{2x-3y}$;

i) $(1 + e^x)yy' = e^x$;

e) $(x^2 + 4)y' = 2xy$;

j) $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + y^2} = 0$.

3. Найдите частное решение дифференциального уравнения:

$(1 + x^2)y' + 4xy = \frac{2}{1+x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

4. Найдите частное решение дифференциального уравнения:

$e^{y-x^2} dy - 2xdx = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \ln 2$.

5. Найдите частное решение дифференциального уравнения:

$y' + \frac{y}{x} - 2e^{x^2} = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = e$.

6. Найти решение задачи Коши: $y' - \frac{2y}{x+1} = (x + 1)^3$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

7. Найти решение задачи Коши: $xy' + 3y = \frac{2}{x(1+x^2)}$, $y(-1) = 0$.

Уровень В

1. Определите вид дифференциального уравнения. Найдите общее решение (общий интеграл).

a) $(x^2 + 3)dy + y\sqrt{x^2 + 3}dx = xydx$;

b) $x(dx - dy) = y(dy + dx)$;

c) $x(y' - 1) + y = 2x \ln x$;

d) $y' = \sqrt{2x + 3y}$;

e) $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} = 0$;

g) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

2. Найдите решение задачи Коши.

a) $y' + (\operatorname{ctg} x)y = \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

b) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{2}{x^2} + 1, \quad y(-1) = 0$;

c) $(x + 2)y' + 4y = \frac{1 + 2x^2}{x(x + 2)^3}, \quad y(-1) = 2$;

d) $(x^2 - 1)y' - 2xy = x(x^2 - 1), \quad y(0) = 4$;

e) $(x^2 - 5)y' - 2xy = -2x(x^2 - 5), \quad y(2) = 7$.

Ответы:

Уровень А

№ 1.

ДУ с разделяющимися переменными	Однородные ДУ	Линейные ДУ первого порядка
a) $y' = x + 3$; d) $y' = (2x + 1) \cdot x$; e) $(x + 1)dy = (4 - 3)dx$; f) $e^{2x} \sin y dy = (x - 1)dx$; j) $y' \sin x = \frac{y}{\ln y}$.	c) $y' = \frac{x + 2y}{3x}$; g) $y' = \frac{x + 2y}{3x - y}$; h) $x^2 y' = x^2 + 3xy$.	b) $y' - 4y = 2x$; c) $y' = \frac{x + 2y}{3x}$; h) $x^2 y' = x^2 + 3xy$; i) $y' - x^2 - 4xy = 0$.

№ 2.

a) $y(x) = C(x + 1)$; b) $y(x) = Ce^{-x}$; c) $y(x) = \frac{e^x}{2} + Ce^{-x}$;

d) $2 \cdot 27^y = 3^{2x+1} + C$; e) $y(x) = C(x^2 + 4)$; f) $y(x) = (x^2 + C)x$;

g) $(1 + y)(1 - x) = C$; h) $\arctg x + \arctg y = C$;

i) $\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C$; j) $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = C$.

№ 3. $y = \frac{2x+1}{(1+x^2)^2}$; № 4. $y = \ln(e^{x^2} + 1)$; № 5. $y = \frac{e^{x^2}}{x}$; № 6. $y = \frac{(x+1)^4}{2}$;

№ 7. $y = \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right)$.

Уровень В

№ 1.

a) $y = C_1 \frac{\sqrt{x^2+3}}{x+\sqrt{x^2+3}}$; b) $y^2 + 2xy - x^2 = C$; c) $y = x \ln x + \frac{C}{x}$;

d) $\frac{2}{3} \sqrt{2x + 3y} - \frac{4}{9} \ln \left| \sqrt{2x + 3y} + \frac{2}{3} \right| = x + C$; e) $x^2(x^2 + 2y^2) = C$;

f) $\frac{y+2}{x-2} = \frac{\ln|x-2|}{3} + C$; g) $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2, \quad y = \mp x$.

№ 2.

$$\mathbf{a)} y = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x);$$

$$\mathbf{c)} y = \frac{\ln|x|+x^2+1}{(x+2)^4};$$

$$\mathbf{e)} y = -(x^2 - 5)(7 + \ln|x^2 - 5|.$$

$$\mathbf{b)} y = \frac{2\ln|x|}{x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2x};$$

$$\mathbf{d)} y = (x^2 - 1) \left(\frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| - 4 \right);$$