Арган диаграммасы және комплекс санның векторлық белгілеуі

ОҚУ МАҚСАТТАРЫ:

12.1.1.6 комплекс жазықтықта (Арган диаграммалары арқылы) комплекс сандарды бейнелеу;

12.5.2.2 қарапайым теңдіктермен және теңсіздіктермен берілетін комплекс жазықтықтағы нүктелер жиындарын бейнелеу (мысалы, $Re\, z > 1$) (Арганның диаграммалары);

БАҒАЛАУ КРИТЕРИЙЛЕРІ:

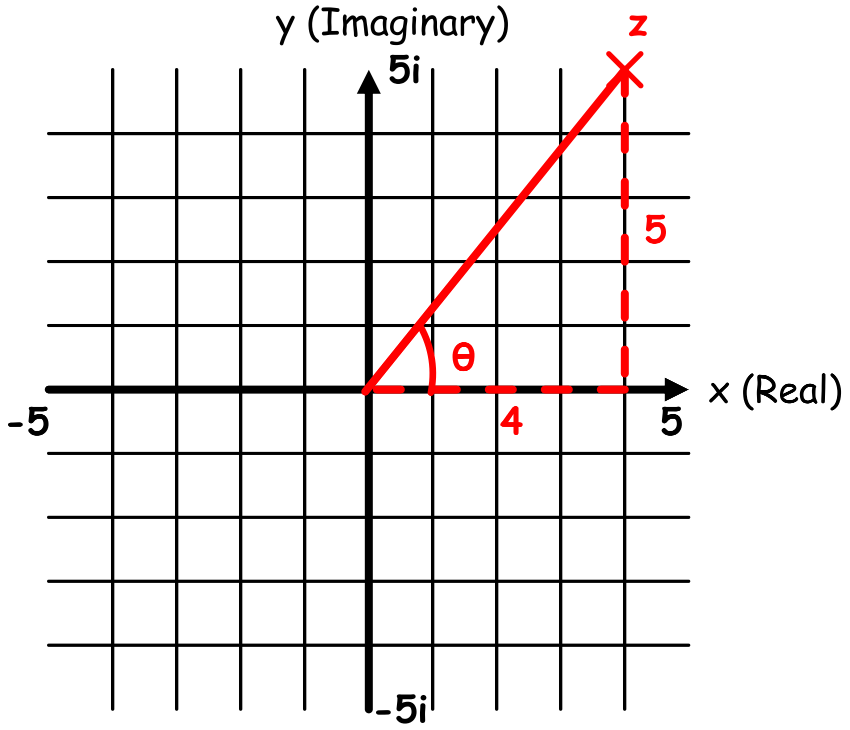
- ✓ Арган диаграммасында комплекс сандарды ұсынады
- ✓ Арган диаграммасында көрсетілген комплекс сандарды көрсетеді
- ✓ Арган диаграммасында екі комплексті санның қосындысы мен айырмашылығын табады

$z = a + bi$ **комплекс сан**, a, b – нақты сандар, ал i – жорымал бірлік $(i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1)$.

1	**Комплекс сандар:** $$z_1 = a + bi \quad \text{и} \quad z_2 = c - di$$
2	**Комплекс сандардың қосындысы:** $$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c - di) = (a + c) + (b - d)i$$
3	**Комплекс сандардың айырымы:** $$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c - di) = (a - c) + (b + d)i$$
4	**Комплекс сандардың көбейтіндісі:** $$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c - di) = (ac + bd) + (bc - ad)i$$
5	**Комплекс сандарды бөлу:** $$\frac{z_1}{z\_} = \frac{(a + bi)}{(c - di)} = \frac{(a + bi)(c + di)}{(c - di)(c + di)} = \frac{(ac - bd) + (bc + ad)i}{c^2 + d^2}$$
6	**Түйіндес комплекс сан $\bar{z}$** $$z_1 = a + bi \quad \Longrightarrow \quad \bar{z}_1 = a - bi$$ $$z_2 = c - di \quad \Longrightarrow \quad \bar{z}_2 = c + di$$

Нүктелерді жазықтықта **комплекс сан** түрінде қарастырғанда, жазықтық **комплекс жазықтық немесе Арган диаграммасы** деп аталады.
OX осі нақты ось Re(z) болады, ал OY жорымал ось Im(z) болады

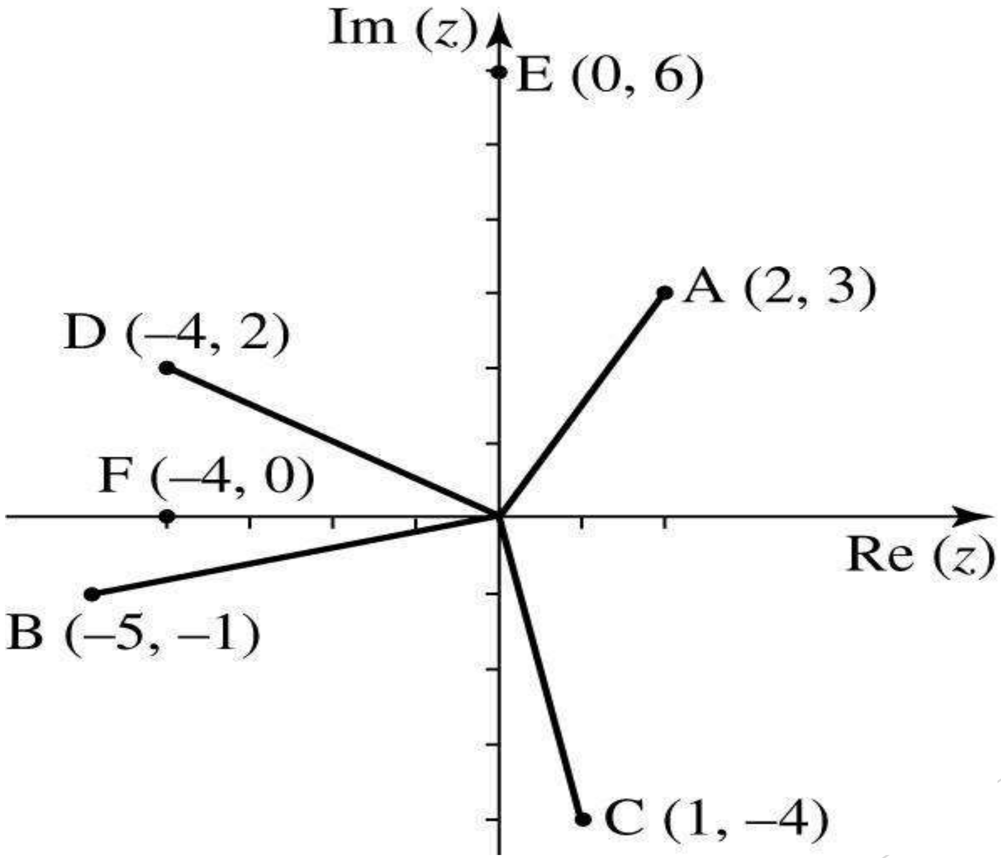
z = 4+5i



https://www.geogebra.org/m/W5BgTwN2 https://www.geogebra.org/m/IXW7eErQ

Жазықтықтағы нүктелерді комплекс сандармен сәйкестендір

1. –5 –i
2. 6i
3. –4 + 2i
4. 1 – 4i
5. –4
6. 2 + 3i

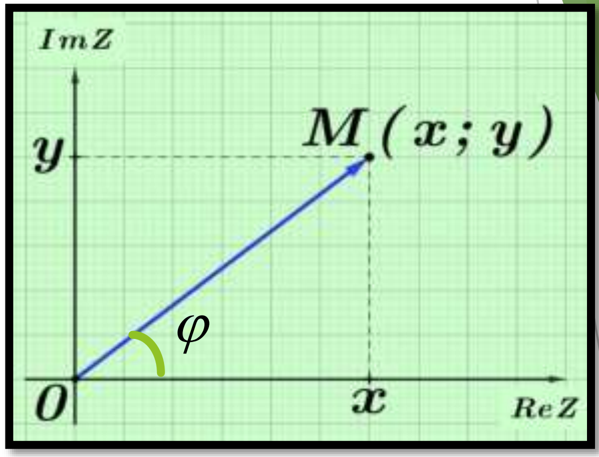


M нүктесін координата басымен қосқанда $\overrightarrow{OM}$ **радиус-векторын** аламыз.

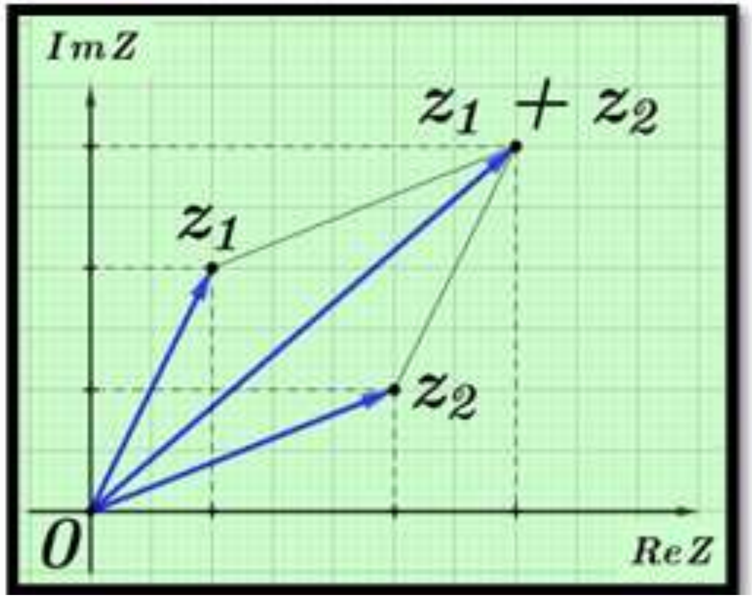
z = x + yi комплекс санының **геометриялық бейнесі** $\overrightarrow{OM}$ векторы.

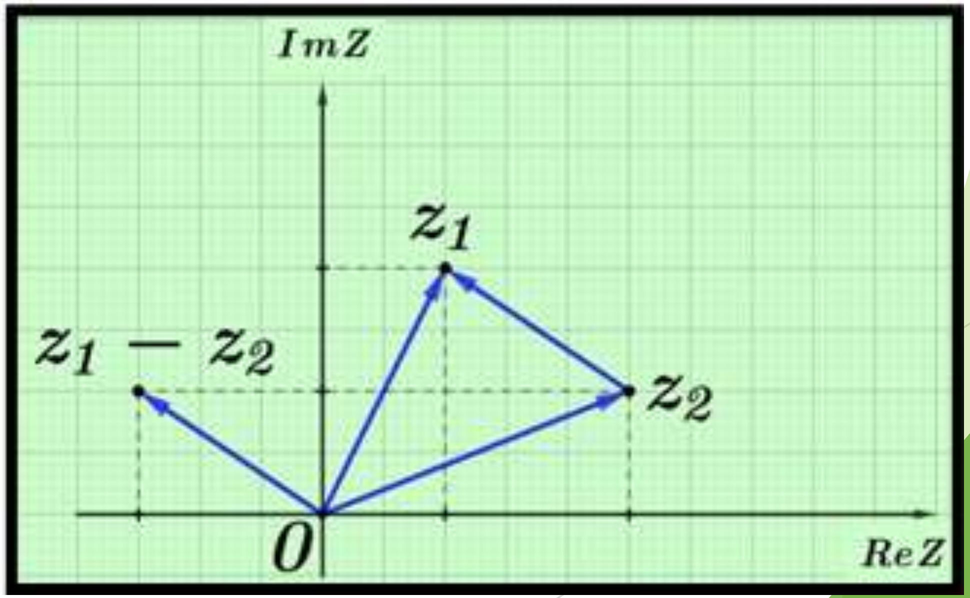
z = x + yi комплекс **санының модулі** деп $\overrightarrow{OM}$ векторыны ұзындығын айтамыз

$$|z| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



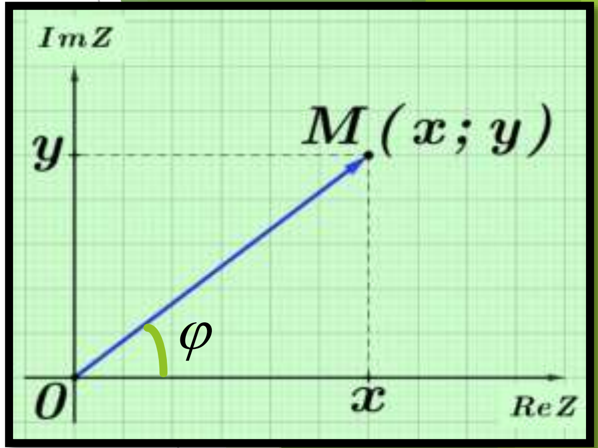
Геометриялық интерпретация: $(z_1 + z_2)$ және $(z_1 - z_2)$





Осы берілген $z = x + yi$ комплекс санының модулі деп $\overline{OM}$ векторының ұзындығын айтамыз.

$|z| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$



$\overline{OM}$ векторының ox осінің оң бағытымен жасайтын φ **бұрышы** z комплекс санының **аргументі** деп аталады және $\varphi = \arg z$ деп белгіленеді, сонымен қатар бұрыш шамасы $\varphi = tg\frac{y}{x}$-ге тең болады.

Z = 0 комплекс санының аргументі анықталмаған.

Z ≠ 0 комплекс санының аргументі табылады және 2πk (k = 0, -1,1, -2,2, ..) мүшесіне дейін анықталады:

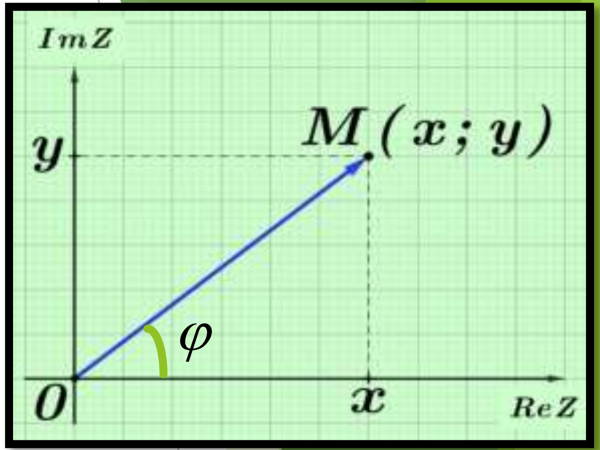
Arg z=arg z+2 πk,

Мұндағы arg z - интервалда алынған негізгі аргумент мәні(- π, π].

Комплексті сан аргументінің негізгі мәні, яғни. біз φ = arg z деп санаймыз.

$$-\pi < \arg z \leq \pi,$$

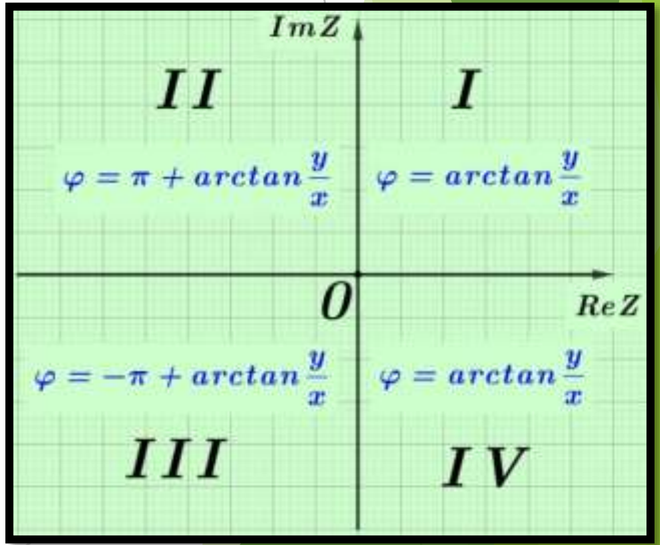
$$tg\varphi = \frac{y}{x}$$



$$\arg z = arctg\frac{y}{x}$$ I, IV квартaлдардың ішкі нүктелері үшін;

$$\arg z = arctg\frac{y}{x} + \pi$$ *II* квартaлдардың ішкі нүктелері үшін;

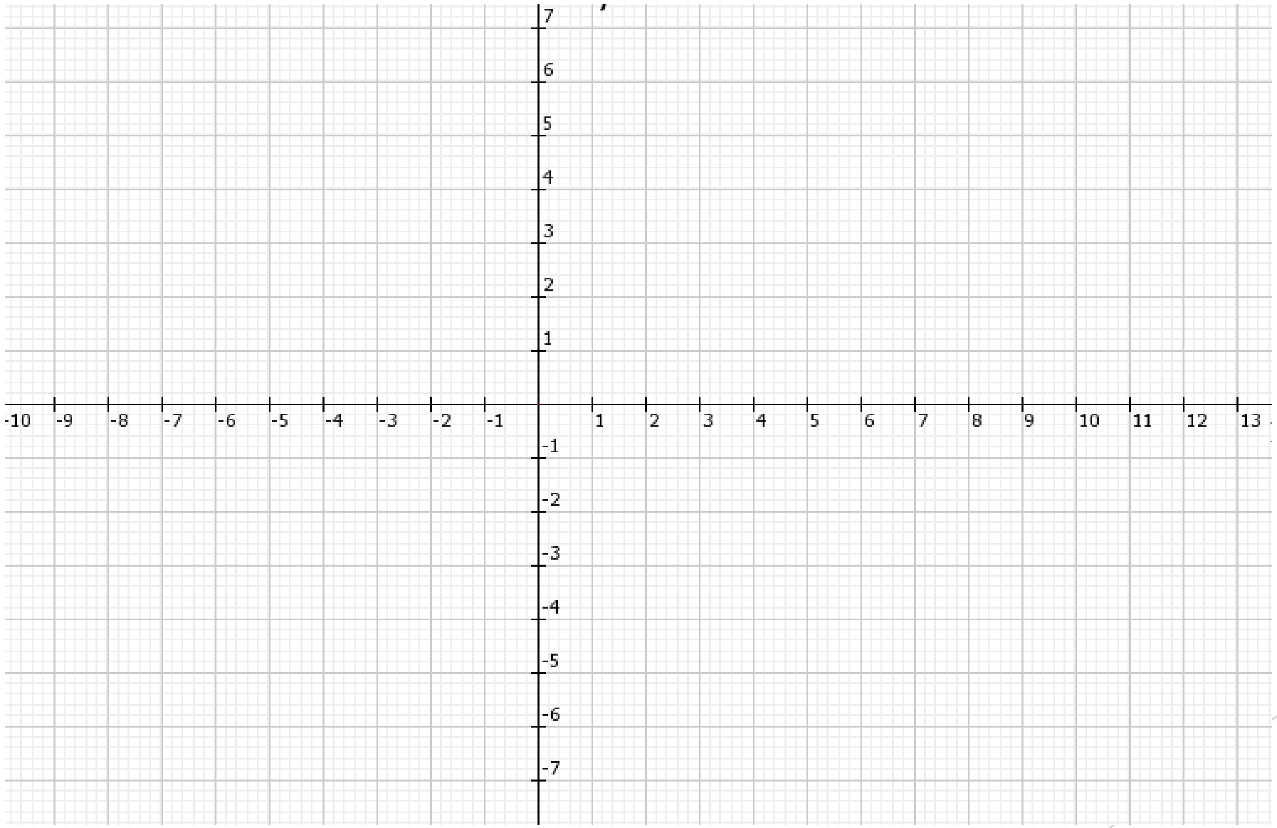
$$\arg z = arctg\frac{y}{x} - \pi$$ *III* квартaлдардың ішкі нүктелері үшін;



№4.

Комплекс сандар берілген: $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 6 + 4i$, $z_3 = -4 + 2i$ және $z_4 = -3 - i$.

1)Комплек сандарды комплекс жазықтығында бейнелеңіз.
2) Берілген комплекс сандардың радиус-векторын салыңыз
3) Әрбір комплекс санның модулін табыңыз.
4) $z_1 + z_2$, $z_2 + z_3$ қосындысын Арган диаграммасында бейнелеңіз
5) $z_2 - z_3$, $z_1 - z_2$ Арган диаграммасында бейнелеңіз



Комплекс жазықтықта келесі шарттарды қанағаттандыратын z комплекс санына сай келетін нүктелер жиынын бейнелеңіз

$$|z| = 1$$

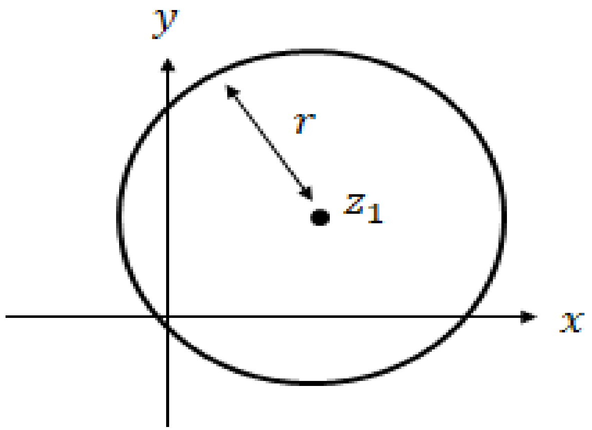
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \textit{ болатынын ескер}$$

Шешуі:
Ізделінді нүктелер жиыны радиусы 1-ге тең болатын центрі (0;0) нүктесі болатын шеңберді құрайды.

$$|z| \leq 5$$

Шешуі:
Ізделінді нүктелер жиыны радиусы 5-ге тең болатын центрі (0;0) нүктесі болатын дөңгелекті құрайды

$|z - z_1| = r$ жазуы нені білдіруі мүмкін?

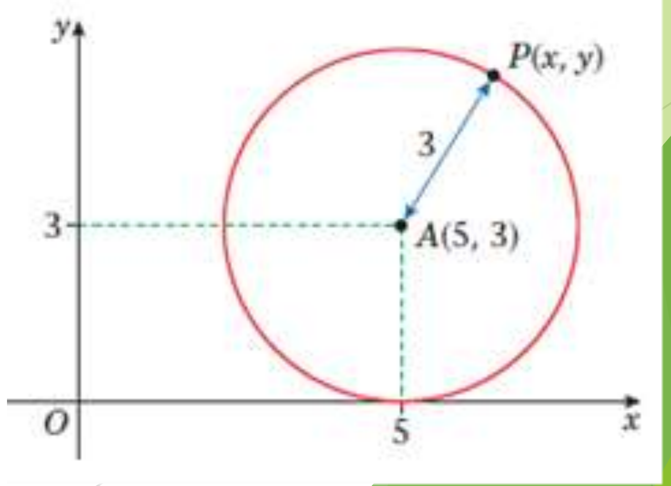


$|z - z_1| = r$ өз алдына центрі (x_1, y_1) және радиусы r болатын **шеңберді** білдіреді, мұндағы $z_1 = x_1 + iy_1$.

Мысал:

$|z - 5 - 3i| = 3$ шартын қанағаттандыратын нүктелердің жиынын бейнелеңіз.

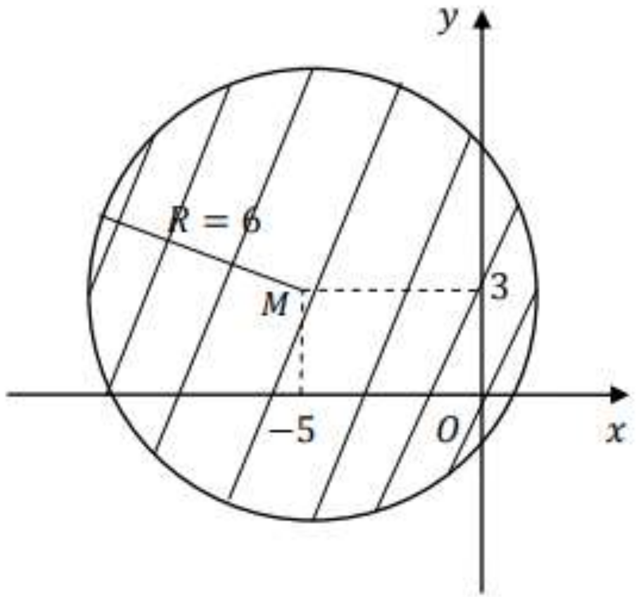
$|z - 5 - 3i| = 3$,	
Z санын x+iy түрінде беруге болады.	$|x+iy - 5 - 3i| = 3$,
Нақты және жорамал бөліктерді топтастырамыз.	$|(x-5) + i(y-3)| = 3$,
Модульді ашамыз	$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 3^2$,
Өрнек келесі түрге айналады	$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 9$,



№9. Комплекс жазықтықта теңсіздікпен көрсетілген аймақты бейнеле $|z+5-3i| \leq 6.$

Берілген теңсіздікті келесі түрде жазамь $|z-(-5+3i)| \leq 6.$

Екі нүкте арасындағы қашықтықтың формуласын ескере отырып, бұл теңсіздікті центрі болып табылатын нүктеден 6-дан аспайтын қашықтықта орналасқан нүктелер жиынтығы деп түсіндіруге болады, яғни теңсіздік центрі (-5;3) нүктесі болатын және радиусы 6-ға тең шеңберді анықтайды



$|z-3+2i| \le 2$ шартын қанағаттандыратын нүктелердің жиынын бейнелеңіз

$1 \le |z| \le 2$ шартын қанағаттандыратын нүктелердің жиынын бейнелеңіз

$(\mathrm{i})\ \left(z+4+i\right)\left(\bar{z}+4-i\right)=49$ **шартын қанағаттандыратын нүктелердің жиынын бейнелеңіз**

$$(\mathrm{i})\ \left(z+4+i\right)\left(\bar{z}+4-i\right)=49$$

$$z\bar{z}+(4+i)\bar{z}+(4-i)z+(4+i)(4-i)=49$$

$$z\bar{z}+4(z+\bar{z})+i\bar{z}-iz+(4+i)(4-i)=49$$

$$z\bar{z}+4(z+\bar{z})-\bar{i}\bar{z}-iz+(4+i)(4-i)=49$$

$$z\bar{z}+4(z+\bar{z})-\left(\overline{iz}+iz\right)+(4+i)(4-i)=49$$

$$x^2+y^2+8x+2y+16+1=49$$

$$x^2+8x+16+y^2+2y+1=49$$

$$\left(x+4\right)^2+\left(y+1\right)^2=49$$

Нүктелер жиыны центрі (- 4; - 1) нүктесінде және радиусы 7 болатын шеңбермен анықталады

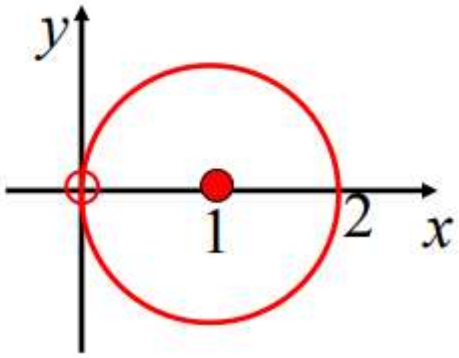
$(ii)\ \frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=1$ **шартын қанағаттандыратын нүктелердің жиынын бейнелеңіз**

$$\bar{z}+z=z\bar{z}$$

$$2x=x^2+y^2$$

$$x^2-2x+y^2=0$$

$$(x-1)^2+y^2=1$$



Нүктелер жиыны центрі (1; 0) нүктесінде және радиусы 1-ге тең шеңбермен анықталады

$$|x+iy| = |x+iy-6i|$$

$$|x+iy| = |x+iy-6i|$$

$$|x+iy| = |x+i(y-6)|$$

$$x^2+y^2 = x^2+(y-6)^2$$

$$x^2+y^2 = x^2+y^2-12y+36$$

$$12y=36$$

$$y=3$$