



Тригонометриялық түрдегі комплекс сандар

Қайталау есептер

$$5) \arg(z - 3 + i) \leq -\frac{\pi}{6};$$

$$6) -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z + 5 - 3i) \leq \frac{\pi}{3}.$$

5. На диаграмме Аргана заштрихуй область, представляющую комплексные числа z , которые удовлетворяют неравенствам:

$$1) |z - 4 - 2i| \leq 2;$$

$$2) |z - 4| < |z - 6|;$$

$$3) 0 \leq \arg(z - 2 - 2i) \leq \frac{\pi}{4}.$$

6. Найди наибольшее и наименьшее значения $\arg z$, если $|z - 1 - i| \leq 1$.

7. Укажи множество точек на комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

$$|z - 3| \leq 3 \text{ и } 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}.$$

8. Изобрази на плоскости комплексные числа, удовлетворяющие условиям:

$$|z - 1 + i| < 2 \text{ и } -\frac{\pi}{3} \leq \arg(z + 1) \leq 0.$$

9. Дано комплексное число $w = -\sqrt{3} + 3i$.

а) Найди $\arg w$ и $|w - 2i|$.

б) На диаграмме Аргана заштрихуй область, представляющую комплексные числа z , которые удовлетворяют неравенствам: $|z - 2i| \leq 2$ и $\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$.

<MAIN> Пример. Изобрази на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $3 < |2iz + 1 - i| < 7$.

<ACT> 4. Отметь на комплексной плоскости точки А, В, О, соответствующие числам z_1 , z_2 и нулю. Определи длины сторон треугольника АВО, если:

$$1) z_1 = 5 - 4i, \quad z_2 = \overline{z_1};$$

$$2) z_1 = 4 - 5i, \quad z_2 = \overline{z_1};$$

$$3) z_1 = -5 - 4i, \quad z_2 = -\overline{z_1};$$

$$4) z_1 = -5 + 4i, \quad z_2 = \overline{z_1};$$

$$5) z_1 = -5 - 4i, \quad z_2 = \frac{9}{z_1};$$

$$6) z_1 = -4 - 5i, \quad z_2 = \frac{9}{z_1}. \text{ </ACT>}$$

Қайталау есептер

<ACT> 7. Найди комплексное число z удовлетворяющее следующему условию, и соответствующую ему точку комплексной плоскости.

- 1) $z(-5 + 3i) = 4 - 6i$;
- 2) $3 + i = z(2 + i)$;
- 3) $zi = 4 - 3i$;
- 4) $-7 - 3,5i = z(1 + i)$;
- 5) $4 + i = z(5 + i)$;
- 6) $zi = -7 - 2i$;
- 7) $5 + 2i = z(2 - 6i)$;
- 8) $z(2 + 3i) = 7 + 6i$. </ACT>

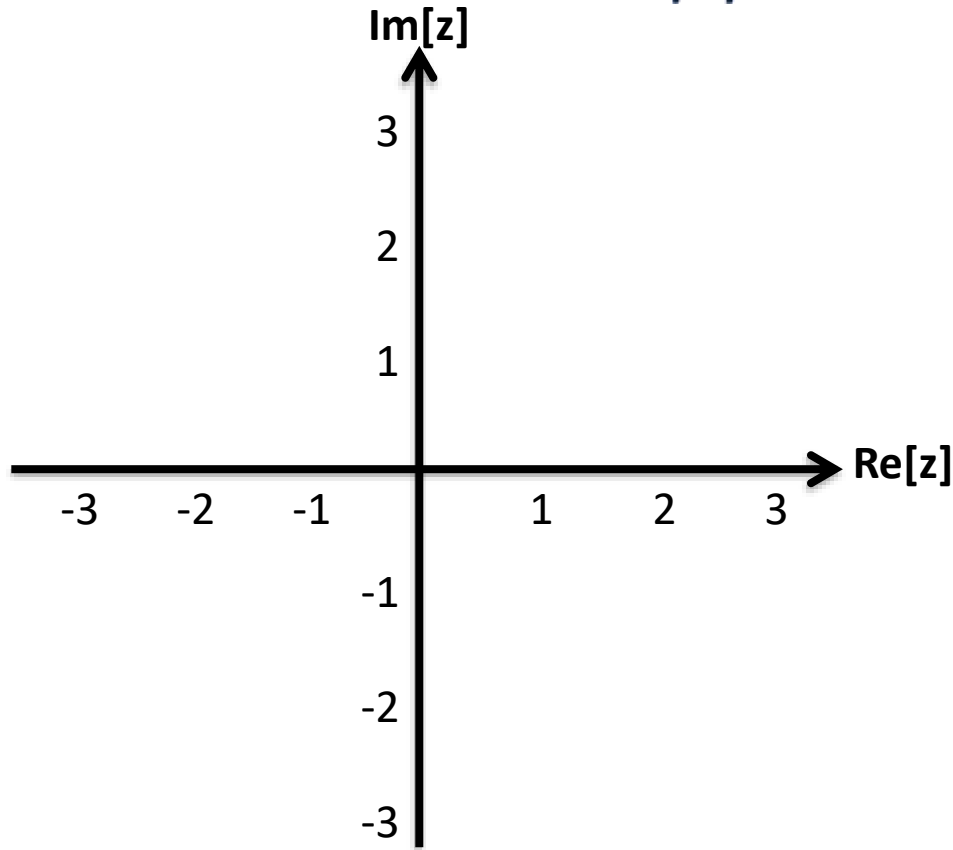
—

<ACT> 5. Даны комплексные числа $z = 1 + i$ и $w = -6 + 4i$. Изобрази следующие числа на диаграмме Аргана.

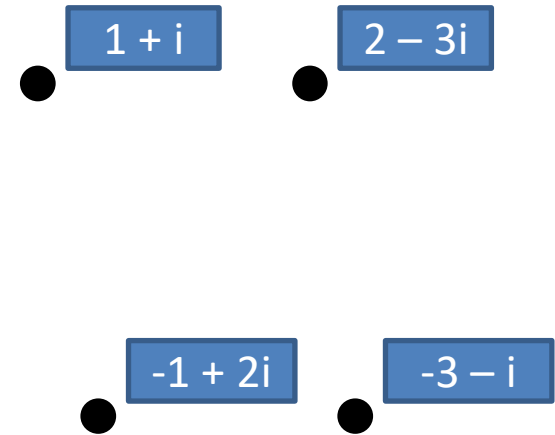
- | | | |
|---------------------|----------------------------|------------------------------|
| 1) z ; | 6) $\frac{1}{2}z\bar{w}$; | 9) $\frac{i\bar{w}}{z}$; |
| 2) \bar{z} ; | 7) $\frac{w}{z}$; | 10) $\frac{z}{z^2}$. </ACT> |
| 3) w ; | 8) $\frac{z-w+3}{z+1}$; | |
| 4) \bar{w} ; | | |
| 5) $2\bar{z} + w$; | | |

Арган диаграммасы

Арган диаграммасы – комплекс сандарды геометриялық түрде берілу формасы



Басыңыз



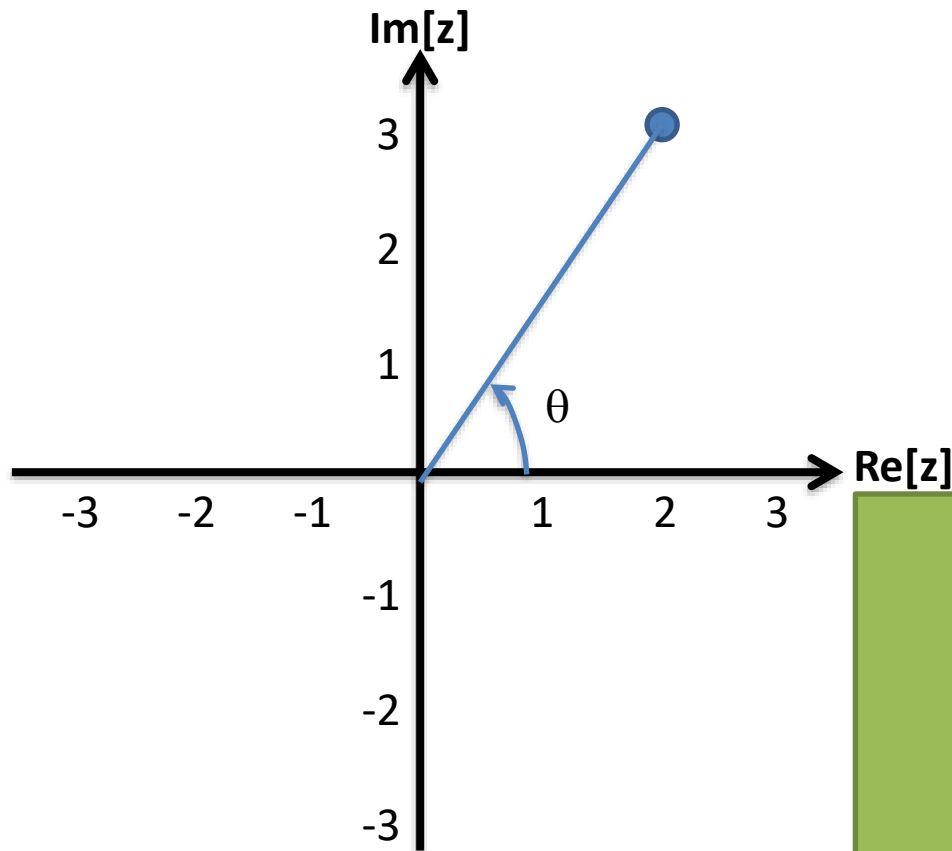
$$z = x + yi$$

x - нақты ось

y - жорамал ось

Модуль және аргумент

$$z = 2 + 3i$$



Координаталар
басына дейінгі
қашықтық:

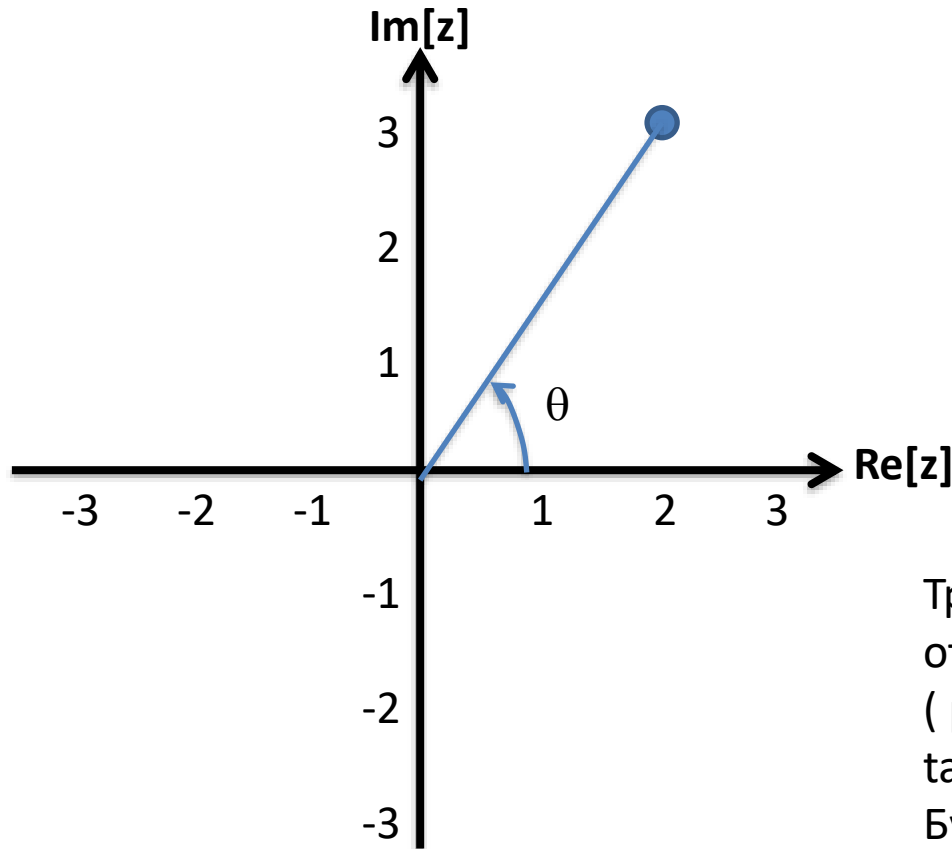
?

Бұрыш: (нақты осьтен сағат
тілі бағытына қарсы)

?

Модуль және аргумент

$$z = 2 + 3i$$



Координаталар
басына дейінгі
қашықтық:

$$\sqrt{(2^2 + 3^2)} = \sqrt{13}$$

Бұл z -тің модулі деп
аталады, жазылуы:

$$|2 + 3i| = \sqrt{13}$$

Бұрыш: (нақты осьтен
сағат тілі бағытына
қарсы)

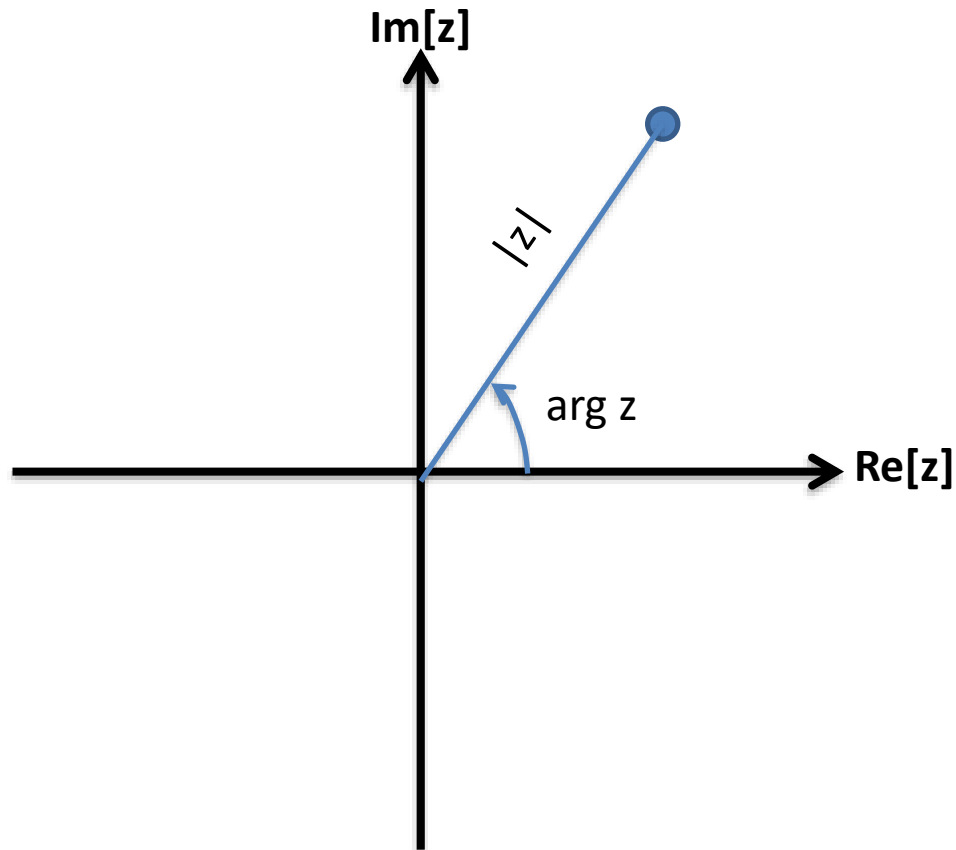
Тригонометрияны қолдана
отырып келесіні аламыз
(радианмен):

$$\tan^{-1}(3/2) = 0,983$$

Бұл z -тің аргументі деп
аталады, белгіленуі:

$$\arg(2 + 3i) = 0.983$$

Модуль және аргумент



$$z = x + yi$$

z модулі:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

z аргументі:

$-\pi < \text{arg } z \leq \pi$. аралығына тиісті.

Егер $-\frac{\pi}{2} < \text{arg } z < \frac{\pi}{2}$

$$\text{arg } z = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Тапсырма 1

1	z	$ z $	$\arg(z)$
	-1		?
	i		?
	$1 + i$?
	$1 + 2i$?
	$1 - 2i$?
	$-1 + 2i$?
	$-1 - 2i$?
	$3 + 4i$?
	$-5 + 12i$?
	$1 - i\sqrt{3}$?

2	z	$ z $	$\arg(z)$
	$-\sqrt{3} - i$?
	$3 + i$?
	$2 - 5i$?
	$-4 + 3i$?
	$-1 - 4i$?

3 $\arg(3 + a + 4i) = \pi/3$ деп a мәнін анықтаңыз.

?

4 $\arg(5 + i + ai) = \pi/4$ болғандағы a мәнін анықтаңыз.

?

5 $\arg(santa + 3 + 2i) = \pi/2$ үшін $santa$ анықтаңыз.

?

Упражнения

1

z	$ z $	$\arg(z)$
-1	1	π
i	1	$\pi/2$
$1 + i$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$
$1 + 2i$	$\sqrt{5}$	1.107
$1 - 2i$	$\sqrt{5}$	-1.107
$-1 + 2i$	$\sqrt{5}$	2.034
$-1 - 2i$	$\sqrt{5}$	-2.034
$3 + 4i$	5	0.927
$-5 + 12i$	13	1.966
$1 - i\sqrt{3}$	2	$-\pi/3$

2

z	$ z $	$\arg(z)$
$-\sqrt{3} - i$	2	$-5\pi/6$
$3 + i$	$\sqrt{10}$	0.322
$2 - 5i$	$\sqrt{29}$	-1.190
$-4 + 3i$	5	2.498
$-1 - 4i$	$\sqrt{17}$	-1.816

3

$\arg(3 + a + 4i) = \pi/3$ деп a мәнін анықтаңыз.

$$4/(3 + a) = \sqrt{3}. \quad a = (4/\sqrt{3}) - 3$$

4

$\arg(5 + i + ai) = \pi/4$ болғандағы a мәнін анықтаңыз.

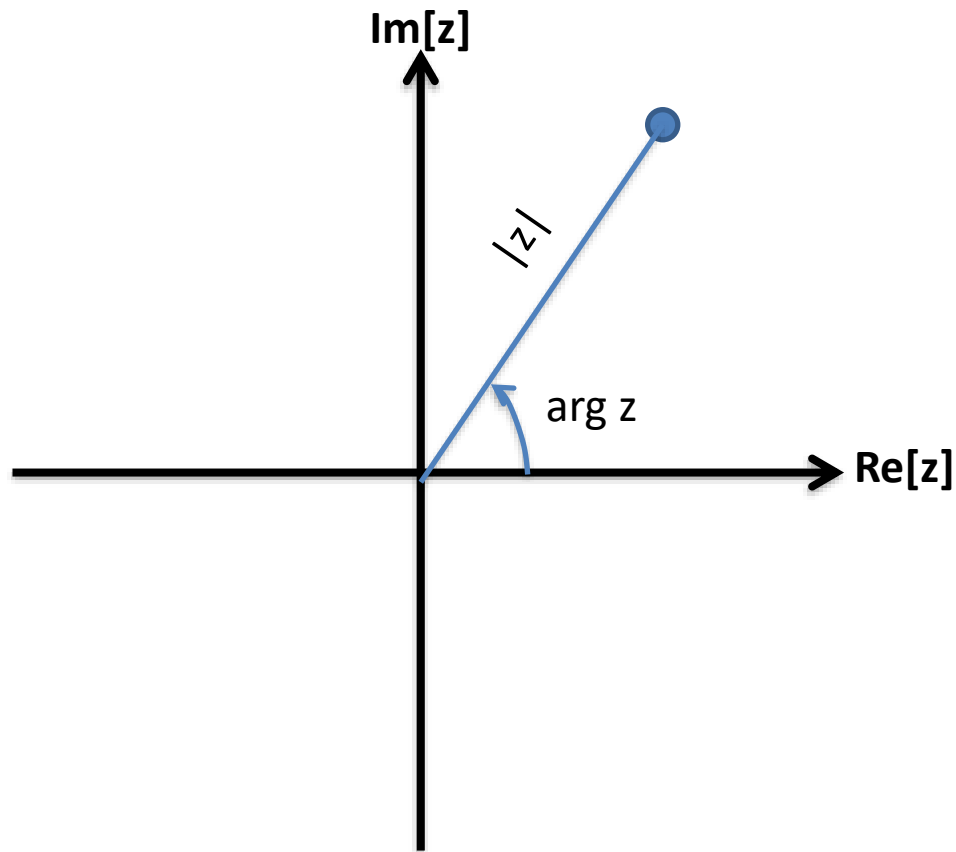
$$(a + 1)/5 = 1. \quad a = 4$$

5

$\arg(santa + 3 + 2i) = \pi/2$ үшін $santa$ табыңыз.

$$santa = -3$$

Комплекс санның тригонометриялық түрі



Айталық,

$$r = |z| \text{ және } \theta = \arg(z).$$

z комплекс санын r және θ арқылы қалай жазамыз?



$$\begin{aligned} z &= x + yi \\ &= r \cos \theta + r i \sin \theta \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}$$

Бұл комплекс санның тригонометриялық түрде жазылуы деп аталады

Тапсырма 2

1

z	$ z $	$\arg(z)$	Тригонометриялық түрі
-1	1	π	?
i	1	$\pi/2$?
$1 + i$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$?
$1 + 2i$	$\sqrt{5}$	1.107	?
$1 - 2i$	$\sqrt{5}$	-1.107	?
$-1 + 2i$	$\sqrt{5}$	2.034	?
$-1 - 2i$	$\sqrt{5}$	-2.034	?
$3 + 4i$	5	0.927	?
$-5 + 12i$	13	1.966	?
$1 - i\sqrt{3}$	$\sqrt{7}$	$-\pi/3$?

z	$ z $	$\arg(z)$	Тригонометриялық түрі
-1	1	π	$z = \cos \pi + i \sin \pi$
i	1	$\pi/2$	$z = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)$
$1 + i$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$	$z = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$
$1 + 2i$	$\sqrt{5}$	1.107	$z = \sqrt{5}(\cos 1.107 + i \sin 1.107)$
$1 - 2i$	$\sqrt{5}$	-1.107	$z = \sqrt{5}(\cos(-1.107) + i \sin(-1.107))$
$-1 + 2i$	$\sqrt{5}$	2.034	$z = \sqrt{5}(\cos 2.034 + i \sin 2.034)$
$-1 - 2i$	$\sqrt{5}$	-2.034	$z = \sqrt{5}(\cos(-2.034) + i \sin(-2.034))$
$3 + 4i$	5	0.927	$z = 5(\cos 0.927 + i \sin 0.927)$
$-5 + 12i$	13	1.966	$z = 13(\cos 1.966 + i \sin 1.966)$
$1 - i\sqrt{3}$	$\sqrt{7}$	$-\pi/3$	$z = \sqrt{7}(\cos(-\pi/3) + i \sin(-\pi/3))$