Комплекс санды түбірден шығару

Оқу мақсаттары

12.1.2.11 тригонометриялық түрде ұсынылған комплекс санды n-ші дәрежелі түбірден шығару формуласын қортып шығарады және қолданады;

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$$

Муавр формуласы *деп аталады.*

$$Z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$W=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

z^5	w^2	z^4w^3	z^4	w^4

z^5	?
w^2	?
z^4w^3	?
z^4	?
w^4	?

- *Жоғарыдағы формуламен қатар Муавр*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

комплекс саннан түбір алу формуласын да қорытып шығарды, яғни

$$x^n = z$$

теңдеуінің х айнымалысына қатысты барлық түбірлерін табу.

- *Егер* $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$

теңдіктің екі жағын да n-ші дәрежеге шығарамыз.

- *Муавр формуласын пайдаланып келесі теңдікті аламыз:*

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

- *Екі комплекс санның теңдігінен мынаны аламыз:*
- $\rho^n = r$ *және* $n\psi = \varphi + 2\pi k$

немесе

- $\rho = \sqrt[n]{r}$ *және* $\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$

мұндағы k *– қандай да бір бүтін сан,*

- $\sqrt[n]{r}$ - r *теріс емес нақты санынан арифметикалық түбірі.*

- *Сонымен,*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad k \in Z,$$

мұндағы

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n - 1$$

$\sqrt[n]{z}$ Есептеу ережесі

1) Тікбұрышты декарттық координата жүйесінде радиусы $\sqrt[n]{\rho}$ болатын шеңбер салыңыз.

2) $\varphi_0 = \dfrac{\varphi}{n}$ сәулесін салыңыз (φ_0 бұрышын салыңыз).

3) Шеңберді тең n бөлікке бөліңіз, $\dfrac{\varphi}{n}$ сәуелсінің шеңбермен қиылысу нүктесінен бастап санағанда.

4) Алынған нүктелердің абсциссалары мен ординаталарын табыңыз. Олар $\sqrt[n]{z}$ санының нақты және жорымал бөліктері болып табылады.

Мысал.

- *Түбірдің барлық мәндерін табыңдар* $\sqrt[3]{2+2i}$.
- *Тригонометриялық түрі:*

$$2+2i=\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

- *Формула бойынша*

$$\sqrt[3]{2+2i}=\sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)=\sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k\right)\right),$$

$k=0,1,2$.

- *Үш мән аламыз:*
- $z_0 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\left(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ\right)$;
- $z_1 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ\right)$;
- $z_2 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4}{3}\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos 255^\circ + i\sin 255^\circ\right).$

Тригонометриялық түрдегі комплекс санды алгебралық түрге көшіреміз.

$$\cos 15^\circ = \cos\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 15^\circ = \sin\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ =$$

- $$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$
- $$\cos 135^\circ = \cos\left(90^\circ + 45^\circ\right) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
- $$\sin 135^\circ = \sin\left(90^\circ + 45^\circ\right) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
- $$\cos 255^\circ = \cos\left(270^\circ - 15^\circ\right) = -\sin 15^\circ = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$
- $$\sin 255^\circ = \sin\left(270^\circ - 15^\circ\right) = -\cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Сондыктан

- $$z_0=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$
- $$z_1=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1+i$$
- $$z_2=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$\sqrt[3]{1}$ барлық мәндерін табыңыз.

шешуі. $z = 1 + 0i, x = 1, y = 0, |z| = 1, \varphi = 0$.

$$\sqrt[3]{1} = 1\left(\cos\frac{0+2\pi k}{3} + i\sin\frac{0+2\pi k}{3}\right),$$ мұндағы $k = 0,1,2.$

$k = 0$, сонда $w_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1;$

$k = 1$, сонда $w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$

$k = 2$, сонда $w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Жауабы: 1; $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Find all the complex fourth roots of $16(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$. Write roots in polar form, with θ in degrees.

Solution There are exactly four fourth roots of the given complex number. From DeMoivre's Theorem for finding complex roots, the fourth roots of $16(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ are

$$z_k = \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{120^\circ + 360^\circ k}{4}\right) + i \sin\left(\frac{120^\circ + 360^\circ k}{4}\right)\right],\ k = 0, 1, 2, 3.$$

Use $z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n}\right)\right]$.
In $16(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$, $r = 16$ and $\theta = 120^\circ$.
Because we are finding fourth roots, $n = 4$.

$$z_0 = \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{120^\circ + 360^\circ \cdot 0}{4}\right) + i \sin\left(\frac{120^\circ + 360^\circ \cdot 0}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt[4]{16}\left(\cos \frac{120^\circ}{4} + i \sin \frac{120^\circ}{4}\right) = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$$

$$z_1 = \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{120^\circ + 360^\circ \cdot 1}{4}\right) + i\sin\left(\frac{120^\circ + 360^\circ \cdot 1}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{480^\circ}{4} + i\sin\frac{480^\circ}{4}\right) = 2(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{120^\circ + 360^\circ \cdot 2}{4}\right) + i\sin\left(\frac{120^\circ + 360^\circ \cdot 2}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{840^\circ}{4} + i\sin\frac{840^\circ}{4}\right) = 2(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ)$$

$$z_3 = \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{120^\circ + 360^\circ \cdot 3}{4}\right) + i\sin\left(\frac{120^\circ + 360^\circ \cdot 3}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{1200^\circ}{4} + i\sin\frac{1200^\circ}{4}\right) = 2(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ).$$

Find all the cube roots of 8. Write roots in rectangular form.

Solution DeMoivre's Theorem for roots applies to complex numbers in polar form. Thus, we will first write 8, or $8 + 0i$, in polar form. We express θ in radians, although degrees could also be used.

$$8 = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 8(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$z_k = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{0 + 2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0 + 2\pi k}{3}\right)\right],\ k = 0, 1, 2.$$

$$z_0 = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{0 + 2\pi \cdot 0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0 + 2\pi \cdot 0}{3}\right)\right]$$

$$= 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2(1 + i \cdot 0) = 2$$

$$z_1 = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{0 + 2\pi \cdot 1}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0 + 2\pi \cdot 1}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{0 + 2\pi \cdot 2}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0 + 2\pi \cdot 2}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$