Жартысын бөлу әдісі

Мысал: $\sin 2x - \ln x = 0$ теңдеуінің [1,3;1,5] кесіндісіндегі түбірді E=10^{-4}=0,0001 дәлдікпен анықтаңыз.

Шешімі: $\sin 2x - \ln x = 0$ теңдеуі берілген кесіндіде [1,3;1,5] тек бір түбірі бар.

1) Теңдеудің түбірін нақтылау керек: [1,3;1,5] кесіндісінің ортасын табамыз: $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.3+1.5}{2} = 1.4$.

1)[1,3;1,4]:

$$f(1{,}3) = sin(2 \cdot 1{,}3) - ln(1{,}3) > 0;$$
$$f(1{,}4) = sin(2 \cdot 1{,}4) - ln(1{,}4) < 0.$$

2)[1,4;1,5]:

$$f(1{,}4) = sin(2 \cdot 1{,}4) - ln(1{,}4) < 0;$$
$$f(1{,}5) = sin(2 \cdot 1{,}5) - ln(1{,}5) < 0.$$

Табылған шешімнің 10^{-4} дәлдікпен сәйкестігін тексереміз:

$\varepsilon = \frac{1{,}4-1{,}3}{2} = 0{,}05 > 10^{-4}$, қажетті дәлдікке келмеді.

1) Әрекеттерімізді ары қарай жалғастырамыз, [1,3;1,4] кесіндісін c нүктесі арқылы жартыға бөлеміз: $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.3+1.4}{2} = 1.35$.

1) [1,3;1,35]:

$$f(1,3) = sin(2 \cdot 1,3) - ln(1,3) > 0;$$
$$f(1,35) = sin(2 \cdot 1,35) - ln(1,35) > 0.$$

2) [1,35;1,4]:

$$f(1,35) = sin(2 \cdot 1,35) - ln(1,35) > 0.$$
$$f(1,4) = sin(2 \cdot 1,4) - ln(1,4) < 0.$$

Төбеде көрсетілген зерттеулерге сәйкес, теңдейдің түбірі [1,35;1,4] кесіндісінде орналасқанын таптық.

Табылған шешімнің 10^{-4} дәлдікпен сәйкестігін тексереміз:

$\varepsilon = \frac{1,4-1,35}{2} = 0,025 > 10^{-4}$, қажетті дәлдікке келмеді.

1) [1,35;1,4] кесіндісін с нүктесі арқылы тағы да тең жартыға бөлеміз: $c = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1.35+1.4}{2} = 1.375$.

1) [1,35;1,375]:

$$f(1,35) = sin(2 \cdot 1,35) - ln(1,35) > 0;$$
$$f(1,375) = sin(2 \cdot 1,375) - ln(1,375) > 0.$$

2) [1,375;1,4]:

$$f(1,375) = sin(2 \cdot 1,375) - ln(1,375) > 0.$$
$$f(1,4) = sin(2 \cdot 1,4) - ln(1,4) < 0.$$

Төбеде көрсетілген зерттеулерге сәйкес, теңдейдің түбірі [1,375;1,4] кесіндісінде орналасқанын таптық.

Табылған шешімнің 10^{-4} дәлдікпен сәйкестігін тексереміз:

$\varepsilon = \frac{1,4-1,375}{2} = 0,0125 > 10^{-4}$, қажетті дәлдікке келмеді.

4) Кесінділерді жартыға бөліп, жаңа кесінділерде функцияның таңбасын тексеру қажетті дәлдік келген уақытқа дейін орындалады (оқушылар өзбетінше), нәтижесінде:

10^{-4} дәлдікпен анықталған теңдеудің түбірін табамыз: x=1,3994.

$y = x^3 - 3x - 5$ функциясы $[2;3]$ кесіндісінде үздіксіз және $f(2) = -3 < 0$ $f(3) = 13 > 0$ болғандықтан, $x^3 - 3x - 5 = 0$ теңдеуінің түбірі $[2;3]$ кесіндісіне тиісті.

Түбірді анықтаудың екі әдісін қарастырайық.
1 әдіс: жартысын бөлу әдісі.
Теңдеудің түбірін $\varepsilon = 0,01$ дейінгі дәлдікпен табамыз.

$f(2,5) = 3,125 > 0$, яғни түбір $[2;2,5]$ аралығына тиісті.

$f(2,25) < 0$, яғни түбір $[2,25;2,5]$ аралығына тиісті.

$f(2,375) > 0$, яғни түбір $[2,25;2,375]$ аралығына тиісті.

$f(2,3125) > 0$, яғни түбір $[2,25;2,3125]$ аралығына тиісті.

$f(2,28125) > 0$, яғни түбір $[2,25;2,28125]$ аралығына тиісті.

$f(2,265625) < 0$, яғни түбір $[2,265625;2,28125]$ аралығына тиісті.

$2\varepsilon = 0,02$ және $2,28125 - 2,265625 = 0,015625 < 0,02$ болғандықтан теңдеудің түбірі шамамен $\frac{2,28125 + 2,265625}{2} = 2,2734375$ тең.

2-әдіс: қарапайым итерация әдісі.

$x^3 - 3x - 5 = 0$ теңдеуін түрлі әдіспен $x = \varphi(x)$ беруге болады.

$x = \dfrac{x^3 - 5}{3}$ түрінде беру ең қолайлысы. Бастапқы жуықтау ретінде $x_0 = 2$ аламыз. $x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 - 5}{3}$ формуласымен тізбектеп жуықтауды есептейміз және тібекті аламыз: 2; 1; -1,33333; -2,45679; -6,60958; -97,91654; … . Алайда, алынған тізбектің шегі жоқ, сондықтан біз бастапқы теңдеуді $x = \dfrac{x^3 - 5}{3}$ түрінде көрсете отырып, түбірдің жуық мәнін таба алмаймыз. Бұл жағдайда теңдеуді $x = \sqrt[3]{3x+5}$ түрінде қолданған жөн. Бастапқы жуықтау ретінде $x_0 = 2$ қоямыз.

Тізбек мүшелерінің мәнедерін 10^{-5} дәлдікпен кесте түрінде береміз:

r	x_r	r	x_r	r	x_r
0	2	4	2.278 62	8	2.279 02
1	2.223 98	5	2.278 94	9	2.279 02
2	2.268 37	6	2.279 00	…	…
3	2.276 97	7	2.279 02	…	…

n ұлғайған кезде тізбектің мүшелері 2,27902 санына ұмтылады деп болжауға болады. Бұл жағдайда 2,27902 саны теңдеу түбірінің жуық мәні болып табылады. Алынған сан теңдеудің түбірі болып табылатындығын тексеру үшін, $\left[2,279015; 2,279025\right]$ кесіндінің ұштарындағы $y = x^3 - 3x - 5$ функциясының мәнін есептеуге болады. Алынды: $f(2,279015) = -0,000047... < 0$ және $f(2,279025) = 0,000078 > 0$. Яғни, 2,27902 саны $x^3 - 3x - 5 = 0$ теңдеуінің жуық мәні болып табылады.

Әртүрлі әдістермен шешу кезінде алынған мәндердегі айырмашылықтар,
әр жағдайда дәлдіктің әр түрлі дәрежесіне байланысты. Егер жартысын бөлу әдісімен шешу кезінде процесті тағы екі қадамға жалғастырса, онда 2,279296875 мәнін аламыз.