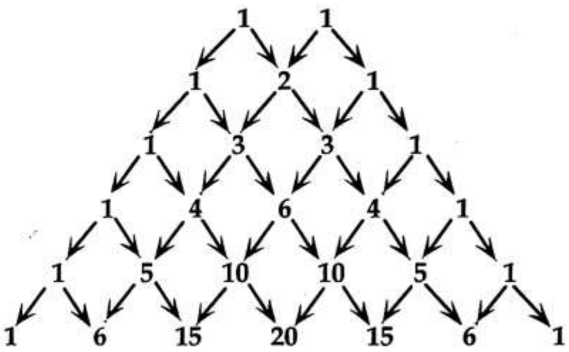
Ньютон биномы формуласы



The Binomial Expansion

Жуықтап есептеулер үшін Ньютон биномы.

Оқу бағдарламасына сілтеме:

12.1.2.11

жуықтап есептеулер үшін рационал көрсеткішті дәрежелердің биномдық жіктелуін қолдану

0	1											
1	1	1										
2	1	2	1									
3	1	3	3	1								
4	1	4	6	4	1							
5	1	5	10	10	5	1						
6	1	6	15	20	15	6	1					
7	1	7	21	35	35	21	7	1				
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1			
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

Қайталау

–Ньютон биномы $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k = 0,1,\ldots,n)$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n =$$

$$= a^n + n a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \ldots + \frac{n!}{(n-m)!\,m!} a^{n-m} b^m + \ldots + b^n, \text{ где } m < n$$

ның номерін анықтау

(k + 1) член выражения (a + b)^n есть $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

$$C_n^k x^{n-k} y^k$$

Жуықтап есептеулер үшін Ньютон биномы

- Ньютон биномының формаласына *a=1, b =x* –қоюға оқушыларға ұсыныңыз.
- $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x^3 + \cdots + x^n.$
- Осы формуланы *x*–тің ($|x| < 1$) кіші мәні болғандағы жуықтаған еспетеулерге қолдануға ынғайлы және *n* –нің кез келген нақтым мәндерінде қолдануға болады

Мысалдарды қарастыру

Ньтон биномының формуласын қолданып, 0,0001−ге дейін есептейміз $(1{,}0018)^5$

Шешуі:

- $1{,}0018^5 = (1 + 0{,}0018)^5 = 1 + 5 \cdot 0{,}0018 + 10 \cdot 0{,}0018^2 + \cdots + 0{,}0018^5.$
- Қосындының үшінші қосылғышың бағалаймыз

$$10 \cdot 0{,}0000324 < 0{,}00004 < 0{,}0001.$$

- Қалған қосылғыштар кіші, сондықтан үшінші мүшесінен бастап қарастыра алмауға болады. Онда $1{,}0018^5 \approx 1 + 5 \cdot 0{,}0018 = 1{,}009.$

Тапсырма

1). $(1+2a)^4$;

2). $(x-y)^6$;

3). Теңдеуді шешіңіз: $(x-2)^6+(x-4)^6=64$;

4). Ньютон биномының жіктеудегі алтыншы мүшесінің коэффициенттің табыңыз: $(a+b)^{10}$

5). Бином жіктеуінің 13-ші мүшесін табыңыз: $(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})^{15}$.

6). Құрамында x–ке тәуелді емес бином мүшесінің номерін табыңыз: $(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x})^{16}$

Тапсырма

1). $(1+2a)^4$;
Жауабы: $1+8a+24a^2+32a^3+16a^4$.
2). $(x-y)^6$;
Жауабы: $x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4-6xy^5+y^6$.
3). Теңдеуді шешіңіз: $(x-2)^6+(x-4)^6=64$; Жауабы: 2; 4.
4). Ньютон биномының жіктеудегі алтыншы мүшесінің коэффициенттің табыңыз: $(a+b)^{10}$ Жауабы: $C_{10}^5=252$.
5). Бином жіктеуінің 13-ші мүшесін табыңыз: $(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})^{15}$.
Жауабы: $T_{13}=T_{12+1}=C_{15}^{12}(\sqrt[3]{3})^3(\sqrt{2})^{12}=87360$.
6). Құрамында x-ке тәуелді емес бином мүшесінің номерін табыңыз: $(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x})^{16}$
Жауабы: $T_{m+1}=C_{16}^m x^{\frac{16-m}{3}}x^{-m}=C_{16}^m x^{\frac{16-4m}{3}}$, $\frac{16-4m}{3}=0$, $m=4$, 5 -ші мүшесі от х-ке тәуелді емес.

Жұптық жұмыс

- Нтон биномының формуласын қолданып, 0,01–ге дейін есептейміз $2{,}005^4$
- Нтон биномының формуласын қолданып, 0,001–ге дейін есептейміз $5{,}005^5$

Тапсырма 2.

$\frac{2x+7}{(x-1)(x+2)}$ өрнегін қарапайым бөлшектерге жіктеп, оның биномдық жіктелуіндегі алғашқы үш мүшесін табыңыз.

Шешуі:
Анықталмаған коэффициенттер әдісін қолданайық:

$$\frac{2x+7}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

Екі жақты да $(x-1)(x+2)$ өрнегіне көбейтсек,

$2x + 7 = A(x+2) + B(x-1)$ аламыз.

$x = 1 \quad \Longrightarrow \quad 9 = 3A \quad \Rightarrow \quad A = 3$

$x = -2 \quad \Longrightarrow \quad 3 = -3B \quad \Rightarrow \quad B = -1$

Демек,

$$\frac{2x+7}{(x-1)(x+2)} = \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

Биномдық жіктелуді қолдану үшін өрнектер $(1 \pm \dots)$ түрінде жазылуы керек, сондықтан келесі түрлендірулерді жасау керек:

$$\frac{2x+7}{(x-1)(x+2)} = \frac{-3}{1-x} - \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = -3(1-x)^{-1} - \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1} \qquad (1)$$

$$\frac{2x+7}{(x-1)(x+2)} \approx -3(1+x+x^2) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) = -\frac{7}{2} - \frac{11x}{4} - \frac{25x^2}{8}.$$

Жауабы: $-\frac{7}{2} - \frac{11x}{4} - \frac{25x^2}{8}$

0,01-ге дейін есептейміз $4{,}98^4$.
Шешуі:

- $4{,}98^4 = (5 - 0{,}02)^4 =$
$$5^4 \cdot (1 - 4 \cdot 0{,}004 + 6 \cdot 0{,}004^2 - 4 \cdot 0{,}004^3 + 0{,}004^4).$$
- Қосындының үшінші қосылғышың бағалаймыз $0{,}06 > 0{,}01$.
- Қосындының төртінші қосылғышың бағалаймыз
$$0{,}00016 < 0{,}01.$$
- Қалған қосылғыштар кіші, сондықтан төртінші мүшесінен бастап қарастыра алмауға болады.. Онда
$$4{,}98^4 = 615{,}06.$$

The Binomial Expansion

You need to be able to expand expressions of the form (1 + x)^n where n is any real number

Find: $(1+x)^4$ Always start by writing out the general form

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} \; \ldots\ldots + {}^nC_r x^r$$

Sub in:
n = 4
x = x

$$(1+x)^4 = 1 + (4)x + 4(3)\frac{x^2}{2} + (4)(3)(2)\frac{x^3}{6} + (4)(3)(2)(1)\frac{x^4}{24}$$

Work out each term separately and simplify

$$= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

Every term after this one will contain a (0) so can be ignored

→ The expansion is <u>finite</u> and <u>exact</u>

The Binomial Expansion

You need to be able to expand expressions of the form $(1 + x)^n$ where n is any real number

Find: $(1-2x)^3$ Always start by writing out the general form

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} \dots\dots + {}^nC_r x^r$$

Sub in:
n = 3
x = -2x

$$(1-2x)^3 = 1 + (3)(-2x) + 3(2)\frac{(-2x)^2}{2} + (3)(2)(1)\frac{(-2x)^3}{6}$$

Work out each term separately and simplify
<u>It is VERY important to put brackets around the x parts</u>

$$= 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3$$

Every term after this one will contain a (0) so can be ignored

→ The expansion is <u>finite</u> and <u>exact</u>

The Binomial Expansion

You need to be able to expand expressions of the form $(1 + x)^n$ where n is any real number

Find: $\dfrac{1}{(1+x)}$

$= (1+x)^{-1}$

Rewrite this as a power of x first

Write out the general form (it is very unlikely you will have to go beyond the first 4 terms)

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!}$$

Sub in:
n = -1
x = x

$$(1+x)^{-1} = 1 + (-1)(x) + (-1)(-2)\frac{(x)^2}{2} + (-1)(-2)(-3)\frac{(x)^3}{6}$$

Work out each term separately and simplify

$$= 1 - x + x^2 - x^3$$

With a negative power you will not get a (0) term

→ The expansion is <u>infinite</u>
→ It can be used as an approximation for the original term

3A

The Binomial Expansion

You need to be able to expand expressions of the form $(1 + x)^n$ where n is any real number

Find: $\sqrt{1-3x}$

Rewrite this as a power of x first

$$= (1-3x)^{\frac{1}{2}}$$

Write out the general form (it is very unlikely you will have to go beyond the first 4 terms)

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!}$$

Sub in:
$n = {}^1/_2$
$x = -3x$

$$(1-3x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)(-3x) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(-3x)^2}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{(-3x)^3}{6}$$

Work out each term separately and simplify
→ You should use your calculator carefully

$$= 1 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}x^2 - \frac{27}{16}x^3$$

With a fractional power you will not get a (0) term

→ The expansion is <u>infinite</u>
→ It can be used as an approximation for the original term

The Binomial Expansion

You need to be able to expand expressions of the form (1 + x)^n where n is any real number

Find the Binomial expansion of: $(1-x)^{\frac{1}{3}}$ and state the values of x for which it is valid…

Write out the general form

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!}$$

Sub in:
n = $^1/_3$
x = -x

$$(1-x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)(-x) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{(-x)^2}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\frac{(-x)^3}{6}$$

Work out each term separately and simplify

$$= 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{81}x^3$$

Imagine we substitute x = 2 into the expansion

$$= 1 - \frac{2}{3} - \frac{4}{9} - \frac{40}{81}$$

$$= 1 - 0.666 - 0.444 - 0.4938$$

The values fluctuate (easier to see as decimals)
→ The result is that the sequence will not converge and hence for x = 2, the expansion is <u>not</u> valid

The Binomial Expansion

You need to be able to expand expressions of the form $(1 + x)^n$ where n is any real number

Find the Binomial expansion of: $(1-x)^{\frac{1}{3}}$ and state the values of x for which it is valid…

Write out the general form

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!}$$

Sub in:
$n = {}^1/_3$
$x = -x$

$$(1-x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)(-x) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{(-x)^2}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\frac{(-x)^3}{6}$$

$$= 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{81}x^3$$

Work out each term separately and simplify

Imagine we substitute x = 0.5 into the expansion

$$= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{5}{648}$$

$$= 1 - 0.166 - 0.027 - 0.0077$$

The values continuously get smaller
→ This means the sequence will converge (like an infinite series) and hence for x = 0.5, the sequence IS valid…

3A

Өзіңді тексер

МЭСК есебі

$(1 + 5x)^{-2}$ биномының x дәрежесі өсу реті бойынша жіктелуінің алғашқы үш мүшесі берілген:

$$1 - 10x + kx^2.$$

Тұрақты k санының мәнін табыңыз.

$1+(-2)\cdot 5x+\dfrac{-2(-2-1)}{2!}\cdot(5x)^2+\ldots$ және 75 деген жауап алынған	B1

Қосымша тапсырма

1)Теңдікті дәлелдеңіз:

a) $C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k-2} = C_{n+2}^{k+2}$

b) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$

2. $(1 + 2x^2 - 3x^4)^{10}$ биномның жіктелуіндегі x^8 –нің коэффициентін табыңыздар.

1. Биномның жіктелуіндегі ортаңғы мүшесін жазыңыз: $\left(2a + \frac{b}{2}\right)^{10}$
2. Егер $(1 + \mathrm{x})^{n}$ биномының жіктелуіндегі үшінші және жетінші мүшелер коэффициенттері тең болса, онда n-ді табыңдар.
3. $(x+7)^7$ биномын қосылғыштарға жіктеңіз
4. Биномның жіктелуінің бесінші мүшесін табыңыз $(2x - 5y)^6$.

Тапсырма 1:

a) x дәрежесінің өсуі бойынша жіктеңіз:

i) $(1+x)^{\frac{1}{3}}$; ii) $(1-3x)^{-2}$; iii) $(3-x)^{-3}$.

b) Өнектің жуық мәнін табыңыз:

i) $1{,}007^{\frac{1}{3}}$; ii) $0{,}097^{-2}$; iii) $2{,}994^{-3}$.

№1

Тест

Разложением степени бинома $(x-3)^6$ является... (отметь один вариант ответа):

- ○ $x^6-19x^5+153x^4-540x^3+1215x^2-1548x+729$
- ○ $x^6-18x^5+153x^4-540x^3+1215x^2-1548x+730$
- ○ $x^6-18x^5+135x^4-540x^3+1215x^2-1458x+730$
- ● $x^6-18x^5+135x^4-540x^3+1215x^2-1458x+729$

№2

Определи четвёртое слагаемое в разложении степени бинома $(3a-2)^5$.

Ответ:

- ○ $720a^2$
- ○ $-720a$
- ○ $720a$
- ◉ $-720a^2$

№3

Определи сумму 3-го слагаемого в разложении степени бинома $(3n+2)^4$ и 4-го слагаемого в разложении степени бинома $(2n+3)^5$.

Ответ:

- ○ $864n^2$
- ○ $1269n^2$
- ○ $846n^2$
- ● $1296n^2$

№4

В разложении $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$ множитель x^3 содержит (отметь один вариант ответа):

- 8 член с коэффициентом 720
- 7 член с коэффициентом 704
- 8 член с коэффициентом 792
- 7 член с коэффициентом 792

Рефлексия.

- *нені білдім, нені үйрендім*
- *нені толық түсінбедім*
- *немен жұмысты жалғастыру қажет*