12.5.2.3 Комплекс жазықтықта күрделі емес (мысалы, Rez>a, Imz>a, $|z-z_0|<a$, arg $(z-z_0)$=a) теңдіктер мен теңсіздіктер арқылы берілген нүктелер жиынын бейнелеу)

1 For each of parts **(i)** to **(viii)**, draw an Argand diagram showing the set of points z for which the given condition is true.

(i) $|z|=2$

(ii) $|z-4|\leqslant 3$

(iii) $|z-5\mathrm{i}|=6$

(iv) $|z+3-4\mathrm{i}|<5$

(v) $|6-\mathrm{i}-z|\geqslant 2$

(vi) $|z+2+4\mathrm{i}|=0$

(vii) $2\leqslant|z-1+\mathrm{i}|\leqslant 3$

(viii) $\mathrm{Re}(z)=-2$

1 For each of parts **(i)** to **(vi)** draw an Argand diagram showing the set of points z for which the given condition is true.

(i) $\arg z=-\frac{\pi}{3}$

(ii) $\arg(z-4\mathrm{i})=0$

(iii) $\arg(z+3)\geqslant\frac{\pi}{2}$

(iv) $\arg(z+1+2\mathrm{i})=\frac{3\pi}{4}$

(v) $\arg(z-3+\mathrm{i})\leqslant-\frac{\pi}{6}$

(vi) $-\frac{\pi}{4}\leqslant\arg(z+5-3\mathrm{i})\leqslant\frac{\pi}{3}$

20 On a single Argand diagram, shade the region representing the complex numbers satisfying both of the following loci:

$$|z+1|\leq 3 \text{ and } -\frac{1}{4}\pi\leq\arg z\leq\frac{1}{4}\pi.$$

21 На диаграмме Аргана начертите эскиз геометрического места точек, заданных равенством $|z-3+3\mathrm{i}|=3$.

1 На диаграмме Аргана изобразите комплексные числа, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\mathrm{Re}(z)\geq 1 \quad \text{и} \quad |z-2\mathrm{i}|\leq 2.$$

2 **(a)** На одной диаграмме Аргана заштрихуйте область, представляющую комплексные числа, которые удовлетворяют обоим условиям

$$\mathrm{Re}(z)\leq 5 \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{6}\leq\arg(z)\leq\frac{\pi}{6}.$$

(b) Найдите максимально возможное значение $|z|$ для комплексных чисел z, лежащих в заштрихованной области в части **(a)**.

2 На диаграмме Аргана изобразите комплексные числа, удовлетворяющие следующим условиям:

$$2 \le |z - 2 + 3i| \le 3 \quad \text{и} \quad \mathrm{Im}(z) \ge -5.$$

12.1.2.3 комплекс санды тригонометриялық түрде көрсету;

Пример 1. Перейти от алгебраической записи комплексного числа к тригонометрической записи, определить модуль и аргумент:

а) $z = -1 + i$

б) $z = \sqrt{3} + i$

Пример 2. Комплексное число $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ представить в алгебраической форме.

Алгебраическая форма z	Тригонометрическая форма z
$3+4i$	
$-4+3i$	
$-5-6i$	
$4-5i$	

12.1.2.5 тригонометриялық түрде берілген комплекс сандарға арифметикалық амалдар қолдану

Мысал 1. Амалдарды орындаңыз:

a) $3\left(cos\frac{\pi}{5} + i\ sin\frac{\pi}{5}\right) \cdot 2\left(cos\frac{\pi}{20} + i\ sin\frac{\pi}{20}\right)$.

b) $2\left(cos\frac{3\pi}{5} + i\ sin\frac{3\pi}{5}\right) : \sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{20} + i\ sin\frac{7\pi}{20}\right)$.

13 Комплексные числа z и w заданы в тригонометрической форме

$$z = 2\cos\frac{1}{6}\pi + 2i\sin\frac{1}{6}\pi \quad \text{и} \quad w = 3\cos\frac{1}{4}\pi + 3i\sin\frac{1}{4}\pi.$$

Найдите комплексное число zw в тригонометрической форме.

Топтық жұмыс: Амалдарды орындаңыз:

○34.29. а) $6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$;

б) $(-5 - 5i)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $0{,}3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)\cdot 20\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

г) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot(2 + 2\sqrt{3}i)$.

○34.30. а) $8\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7}{12}\right) : 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

б) $(10 + 10i) : \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right)$;

в) $12\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) : 0{,}3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$;

г) $16\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) : (4 - 4\sqrt{3}i)$.

Жауаптары:

34.29. а) $2i$; б) $-5i\sqrt{2}$; в) $3(\sqrt{3} + i)$; г) $i\sqrt{3}$.

34.30. а) $-\sqrt{3} + i$; б) $-5i$; в) $40i$; г) $\sqrt{3} + i$.

Жұптық жұмыс:

Өздік жұмыс:

Convert to trigonometric form and compute. Write the final answer in standard form.

$$\frac{-2-2i}{1-i}$$

12.1.2.7 тригонометриялық түрде берілген комплекс санды дәрежеге шығару;

Практикалық жұмыс:
Амалдарды орындаңыз:

36.7. а) $(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)^8$; в) $(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ)^{10}$;
б) $(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)^{18}$; г) $(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ)^{100}$.

36.10. а) $(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)^{-9}$; в) $(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)^{-12}$;
б) $(\cos 10^\circ - i\sin 10^\circ)^{-3}$; г) $(\cos 80^\circ - i\sin 80^\circ)^{-18}$.

36.13. а) $(1 + i\sqrt{3})^7 + (1 - i\sqrt{3})^7$; в) $(\sqrt{3} + i)^5 + (\sqrt{3} - i)^5$;

б) $\dfrac{16i\left(\sin\frac{\pi}{3} - i\cos\frac{\pi}{3}\right)^2}{(\sqrt{3} + i)^4}$; г) $\dfrac{32i\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)^2}{(\sqrt{3} - i)^5}$.

36.14. а) Вычислите z^{12}, если $z = 2\cos\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{3\pi}{4} + i + i\cos\frac{3\pi}{4}\right)$;

б) вычислите z^{30}, если $z = 2\sin\frac{\pi}{12}\left(1 - \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Жауаптары:

в) $-64(\sqrt{3} + i)$; г) $-512i$. **36.10.** а) $-i$; б) $0{,}5(\sqrt{3} + i)$; в) $-0{,}5(1 + i\sqrt{3})$;
г) 1. **36.11.** а) $-\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{8}i$; в) $\frac{1}{32}i$; г) $-\frac{1}{1024}$. **36.12.** а) $-0{,}125$; б) $2^{-6}(1 + i\sqrt{3})$;
в) $2^{-8}(-\sqrt{3} + i)$; г) $2^{-9}i$. **36.13.** а) 128; б) $-i$; в) $-32\sqrt{3}$; г) 1. **36.14.** а) $-64i$; б) i

Жұппен жұмыс:

Convert to trigonometric form and compute. Write the final answer in standard form.

$(1+i)^6$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{10}$

23 The complex number z is defined by $z = 1 + \mathrm{i}$. It is given that n is a positive integer. Given also that z^n is a real number, what can you deduce about the value of n?

22 Использование теоремы Муавра приводит к тождеству

$$\cos 6\theta \equiv \cos^6\theta - k\cos^4\theta\sin^2\theta + k\cos^2\theta\sin^4\theta - \sin^6\theta .$$

Найдите значение постоянного числа k.

12.1.2.10 тригонометриялық түрде ұсынылған комплекс санды n-ші дәрежелі түбірден шығару формуласын қортып шығару және қолдану;

22 Дано комплексное число $w = 9(\cos\frac{1}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1}{4}\pi)$. Один из квадратных корней w равен $3(\cos\frac{1}{8}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1}{8}\pi)$. Выразите другой квадратный корень w в виде $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, где $r > 0$ и $0 \le \theta < 2\pi$.

7. $z^2 = -8 + 8i\sqrt{3}$ комплекс санының барлық түбірлерін тауып, Арган диаграммасына бейнелеңіз.

8. $z^3 = 64$ комплекс санының барлық түбірлерін тауып, Арган диаграммасына бейнелеңіз.

9. $z^2 = 16i$ комплекс санының түбірлерінің қосындысын табыңыз.

10. $z^3 = 8i$ комплекс санының барлық түбірлерін тауып, Арган диаграммасына бейнелеңіз

12.1.1.8 көрсеткіштік түрде берілген санды алгебралық түрде жазу және керісінше;

№1

(a) Showing all necessary working, express the complex number $\frac{2+3\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$ in the form $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, where $r > 0$ and $-\pi < \theta \leqslant \pi$. Give the values of r and θ correct to 3 significant figures. [5]

№2

The complex number z is defined by $z = \frac{9\sqrt{3}+9\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$. Find, showing all your working,

(i) an expression for z in the form $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, where $r > 0$ and $-\pi < \theta \leqslant \pi$, [5]

(ii) the two square roots of z, giving your answers in the form $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, where $r > 0$ and $-\pi < \theta \leqslant \pi$. [3]