Қарапайым итерация әдісі

12.3В бөлім: Сандық әдістер

12.2.2.4 теңдеулерді шешуде қарапайым итерация және жартылай бөлу әдістерін қолдану

Есеп.

Келесі теңдеулердің қайсысын алгебралық әдіспен шешуге болады, ал қайсыларын болмайды? Әр теңдеу үшін нақты немесе жуық шешімін табыңыз.

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$ 2) $x^2 + 10x + 8 = 0$ 3) $x^5 - 5x + 3 = 0$

4) $x^3 - x = 0$ 5) $e^x = 4x$

$x^5 - 5x + 3 = 0$ және $e^x = 4x$ теңдеулері алгебралық жолмен шығарылмайтынын түсінген шығарсыздар. Осындай теңдеулерді шешу үшін біздер бұрын пайдаланбаған әдістерді қолданамыз, олармен осы тарауда танысамыз.

Сызықты емес теңдеулерді екіге бөлуге болады - алгебралық және трансценденттік. Алгебралық теңдеулер деп тек алгебралық функциялардан тұратын теңдеулерді айтады (бүтін, рационал, иррационал). Көпмүше негізінен бүтін алгебралық функция болып табылады. Басқа функциялардан құралған (тригонометриялық, көрсеткіштік, логарифмдік және басқалар) теңдеулерді трансценденттік теңдеулер деп атайды.
Сызықты емес теңдеулерді шешу әдістері екі топқа бөлінеді:

1. Нақты әдістер;
2. Итерациялық әдістер.

Нақты әдістерде түбірді қандай да бір шекті қатынас (формула) түрінде жазуға болады. Мектептің алгебра курсынан тригонометриялық, логарифмдік, көрсеткіштік, сондай-ақ қарапайым алгебралық теңдеулерді шешу әдістері белгілі.

Көптеген теңдеулер мен теңдеулер жүйелердің аналитикалық шешімі болмайтыны белгілі. Бірінші кезекте бұл көптеген трансценденттік теңдеулерге қатысты. Төртінші дәрежелі теңдеулерден жоғары алгебралық кезкелген теңдеулерді шешу формуласын құру болмайтыны дәлелденген. Сонымен қатар, кейбір жағдайларда теңдеуде тек шамамен белгілі коэффициенттер бар, демек, теңдеудің түбірін дәл анықтау туралы есептің өзі мағынаны жоғалтады. Оларды шешу үшін берілген дәлдік дәрежесі бар итерациялық әдістер қолданылады.

Жуықтау әдістерінде шешімді табу процесі шексіз. Шешім шексіз тізбек түрінде $\{\boldsymbol{x_n}\},$ алынады, осындай $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{x}^*$ сияқты. Шектің анықтамасы бойынша, кезкелген (мейлінше аз) ε үшін, қандайда n табылады. Мұндағы $n > N$, $|x_n - x^*| < \varepsilon$. x_n тізбегінің мүшелері шешімге тізбектеп жуықтау немесе **итерация** деп аталады. Берілген ε санын есептеу әдісінің дәлдігі деп атайды, ал N-интерация саны шешімді ε дәлдікпен алу үшін орындалатын.

f(x) = 0 теңдеуінің түбірін итерациялық әдіспен табу есебі екі кезеңнен тұрады:

1. оқшауландыру (немесе түбірді ажырату) – түбірдің жуық мәнін немесе түбір бар кесіндіні іздеу;
2. жуық түбірлерді нақтылау-оларды берілген дәлдік дәрежесіне дейін жеткізу.

1. *Оқшауландыру (немесе түбірді ажырату)*

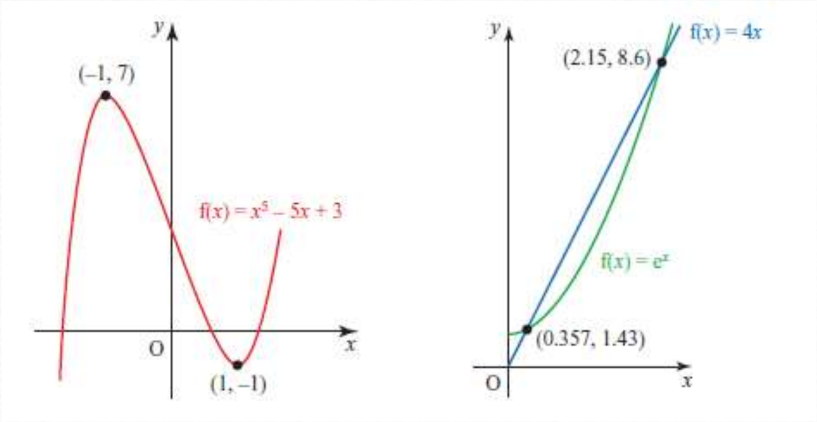
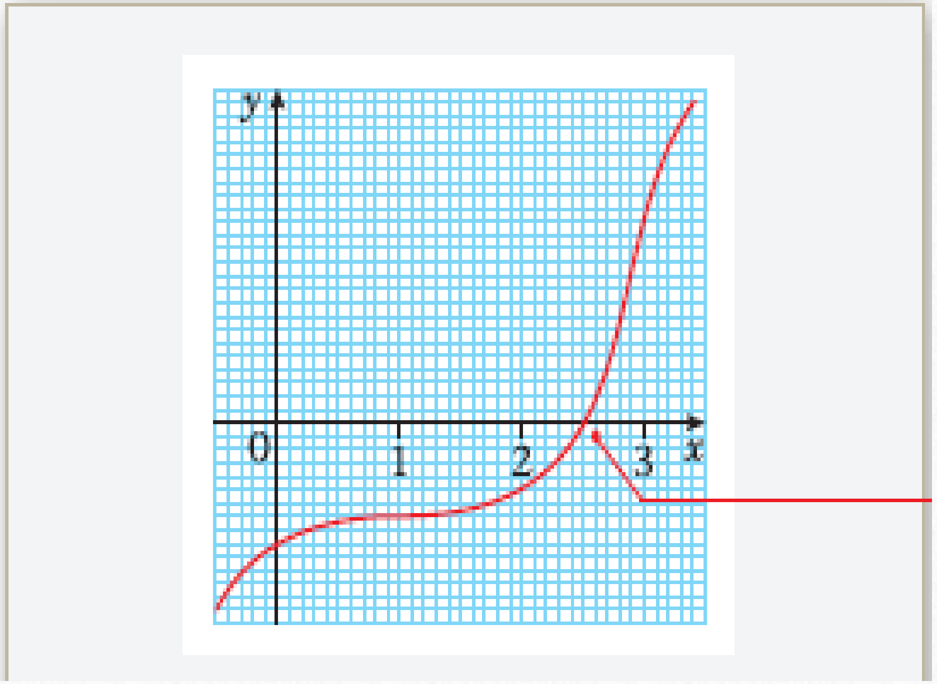


График бойынша $x^5 - 5x + 3 = 0$ теңдеуінің түбірлері [-2;-1], [0;1] және [1;2] аралықтарында орналасқандығы көрініп тұр, ал $e^x = 4x$ теңдеуінің түбірлері [0;1] және [2;3] аралығында орналасқаным байқауға болады.

Түбірдің оқшауландырылуы [a, b] кесіндісінде жалғыз тек қана жалғыз түбірін анықтаудан тұрады. Түбірді оқшаулаудың әмбебап (универсал) алгоритмі жоқ.
Кейбір жағдайларда оқшаулау кесіндісі жеке ойлардан табылуы мүмкін.
Түбірді оқшаулау кейде графикті салу немесе $y = f(x)$ функциясының мәндер кестесін құру арқылы ыңғайлы. Кесіндіде түбірдің бар болуына [a, b] кесіндінің ұшындағы функция таңбаларының айырмашылықтарын көрсетеді. Бұған математикалық талдаудың келесі теоремасы негіз болады.

Теорема. Егер f функциясы [a; b] кесіндісінде үздіксіз болса және оның ұшында әр түрлі таңбалы мәндерді қабылдаса, сондықтан $f(a)f(b) < 0$, онда [a; b] кесіндісінде теңдеудің кем дегенде бір түбірі бар.

Есеп 1. $x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$ теңдеуінің $x = 2$ және $x = 3$ аралығында бір түбірі бар екенін көрсетіңіз.



Шешуі. Теңдеудің түбірі берілген кесіндіде орналасқанын дәлелдеу үшін түбірдің бар болу теоремасын қолдана аламыз. Функцияның берілген кесіндінің ұштарындағы мәндері сәйкесінше $y(2) = 8 - 12 + 6 - 4 = -2$ және $y(3) = 27 - 27 + 9 - 4 = 5$ тең. Кесіндінің ұштарындағы функцияның мәндері әр түрлі таңбаға ие екенін байқай аламыз, демек теңдеудің берілген аралықта түбірлері бар. Түбірдің жалғыздығын дәлелдеу үшін оны осы аралықта туындының көмегімен монотондылыққа зерттеуіміз керек.. [2;3] аралығында $y' = 3x^2 - 6x + 3$ туындысы оң, демек өспелі, яғни монотондылық шарты орындалады. Осындан берілген аралықта теңдеудің бір ғана түбірі бар деп тұжырымдай аламыз.

1. $f(x) = 3 - 5x + x^3$ функциясы берілген. $f(x) = 0$ теңдеуінің түбірі $x = a$ болатынын көрсетіңіз, мұндағы a [1;2] аралығында орналасқан.

2. $f(x) = x^3 - 7x + 5$ функциясы берілген.
a. Кестені толтырыңыз

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

b. $x^3 - 7x + 5 = 0$ теңдеуінің теріс түбірі α және α+1 аралығында орналасқаны белгілі, мұндағы α – бүтін сан. α-ның ммәнін табыңыз.

Инженерлік практикада жуық түбірлерді анықтаудың *графикалық тәсілі* кең таралған. Теңдеудің нақты түбірі – бұл абсцисс осімен f(x) функциясының графигінің қиылысу нүктелері екенін назарға ала отырып, f(x) функциясының графигін құру және f(x) функциясының *Ox* осімен қиылысу нүктелерін белгілеу жеткілікті немесе *Ox* осінде бір түбірінен тұратын кесінді белгілеу керек. Көбінесе $f(x) = 0$теңдеуін оған *тең шамалас* $f_1(x) = f_2(x)$ теңдеуімен алмастырып графиктерді салу ықшамдалады.

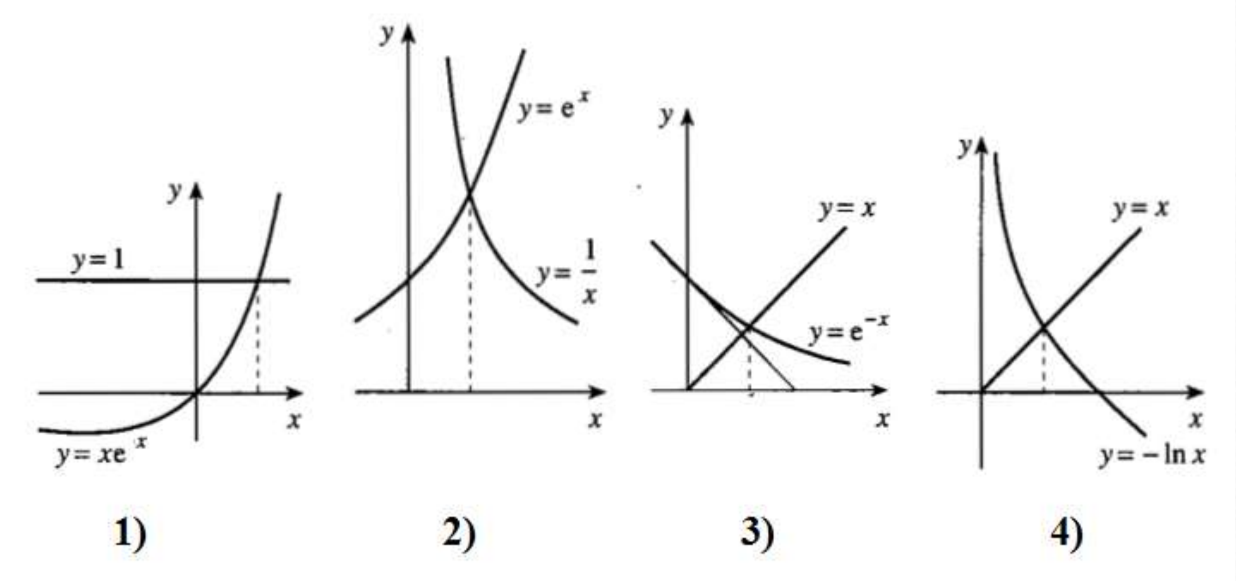
$$f_1(x) = f_2(x), \qquad (3)$$

мұндағы $f_1(x)$ және $f_2(x)$ функциялары $f(x)$ функциясына қарағанда қарапайым. $y=f_1(x)$ және $y = f_2(x)$, функцияларының графиктерін салып, ізделінді түбірлерді осы графиктердің қиылысу нүктелерінің абсциcстері ретінде анықтаймыз. $y = f_1(x)$ және $y = f_2(x)$ функцияларды таңдау әр түрлі болуы мүмкін екенін көрсету үшін келесі мысалдарды қарастыруға болады.

Мысал. $xe^x = 1$ теңдеудің түбірі бар кесіндіні ондық үлеске дейінгі дәлдікпен анықтаңыз.

Шешім:
Түбірді оқшаулау үшін графикалық әдісті қолданамыз. Бастапқы теңдеудің графикалық көрінісінің төрт жолын қарастырайық:

1) $xe^x = 1$; 2) $e^x = \frac{1}{x}$; 3) $x = e^{-x}$; 4) $x = -\ln x$.



Төрт суреттің барлығында теңдеудің бір түбірі бар екені көрініп тұр, дегенмен үшінші суретте ақпарат көбірек. $y = e^{-x}$ функциясының $x = 0$ нүктесіндегі жанамасының бұрыштық коэффициенті -1 тең, жанама мен $y = x$ теңдеуінің қиылысу нүктесінің координатасы $(0,5; 0,5)$. Яғни теңдеудің түбірі 0,5- тен шамалы үлкен.

Түбірі бар кесіндіні анықтау үшін бастапқы теңдеуді $f(x) = 0$ түрінде көрсетеміз және болжамды кесіндінің ұшында$f(x)$ функцияның қандай таңбаларды қабылдайтынын анықтаймыз: Тең шамалас нұсқаларды қарастырайық:

1) $xe^x - 1 = 0$; 2) $e^x - \frac{1}{x} = 0$; 3) $x - e^{-x} = 0$; 4) $x + ln\,x = 0$.

Калькулятор арқылы есептеу үшін төртінші нұсқа ыңғайлы, өйткені орындалатын әрекеттер аз. $f(x) = x + ln\,x$ қолдана отырып, $f(0,5) \approx -0,193$ және $f(0,6) \approx 0,089$ аламыз. $x + ln\,x = 0$ (сондай ақ $xe^x = 1$ теңдеуі) теңдеуінің түбірлері $[0,5; 0,6]$ кесіндісіне тиесілі. бұл кесіндіде $f(x) = x + ln\,x$функциясы монотонды болғандықтан және осы кесіндінің ұшындағы әр түрлі таңбалы мәндерді қабылдайды.

Жуық түбірлерді нақтылау

Теңдеу түбірлерінің жуық мәнін табудың түрлі әдістері бар. Олардың екеуін қарастырайық: жартысын бөлу әдісі және қарапайым итерация әдісі.

Жартысын бөлу әдісі.

Кесіндіні екіге бөлу әдісі сызықты емес теңдеуді шешудің ең қарапайым және сенімді тәсілі болып табылады.

Алдынғы талдаудан $f(x) = 0$теңдеудің x^* түбірі $[a_0; b_0]$кесіндіде екені белгілі болсын, яғни x*∈$[a_0; b_0]$, сондықтан f(x*) = 0.

f (x) функциясы $[a_0; b_0]$кесіндісінде үздіксіз болсын және ұштарында әр түрлі таңбалы мәндерді қабылдасын, яғни $f(a_0)f(b_0) < 0$.
$[a_0; b_0]$ кесіндіні қақ екіге бөлеміз. $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$нүктесін аламыз. Осы нүктедегі функцияның мәнін есептейік: $f(x_0)$.
Егер $f(x_0) = 0$ болса, ондаx_0 -ізделінді түбір, және есеп шешілді. Егер $f(x) \neq 0$ болса, онда $f(x_0)$- белгілі бір таңбалы сан: $f(x_0) > 0$ және $f(x_0) < 0$.
Сонда немесе $[a_0; x_0]$кесіндінің ұштарында, немесе $[x_0; b_0]$ кесіндінің ұштарында f(x) функциясының мәндері әртүрлі таңбаларға ие болады. Мұндай кесіндіні $[a_1; b_1]$ деп белгілейміз. Әрине x*∈$[a_1; b_1]$екені анық және $[a_1; b_1]$кесіндісінің ұзындығы $[a_0; b_0]$ кесіндісінің ұзындығына қарағанда екі есе аз.
$[a_1; b_1]$ кесіндісімен де ұқсас әрекет жасаймыз. Нәтижесінде не x^*түбір, немесе
жаңа кесінді $[a_2; b_2]$ аламыз және т.с.с. $b_n - a_n < 2\varepsilon$ теңсіздік орындалған кезде берілген дәлдікпен жуықтап ε есептеулер аяқталады

Қарапайым интерация әдісі

$f(x) = 0$ теңдеуді оған баламалы $x = \varphi(x)$ теңдеуімен алмастырылуы болсын. Қандайда бастапқы x_0 жуықтауды таңдаймыз. $x = x_0$ болғандағы $\varphi(x)$ функциясының мәнін есептейміз және $x_1 = \varphi(x_0)$ болғандағы нақты мәнін анықтаймыз. Енді x_1-ді $x = \varphi(x)$ теңдеуіне қойып, жаңа жуықтауды $x_2 = \varphi(x_1)$аламыз және т. с.с. Бұл процесті шексіз жалғастыра отырып, түбірге жақындаудың тізбегін аламыз: $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

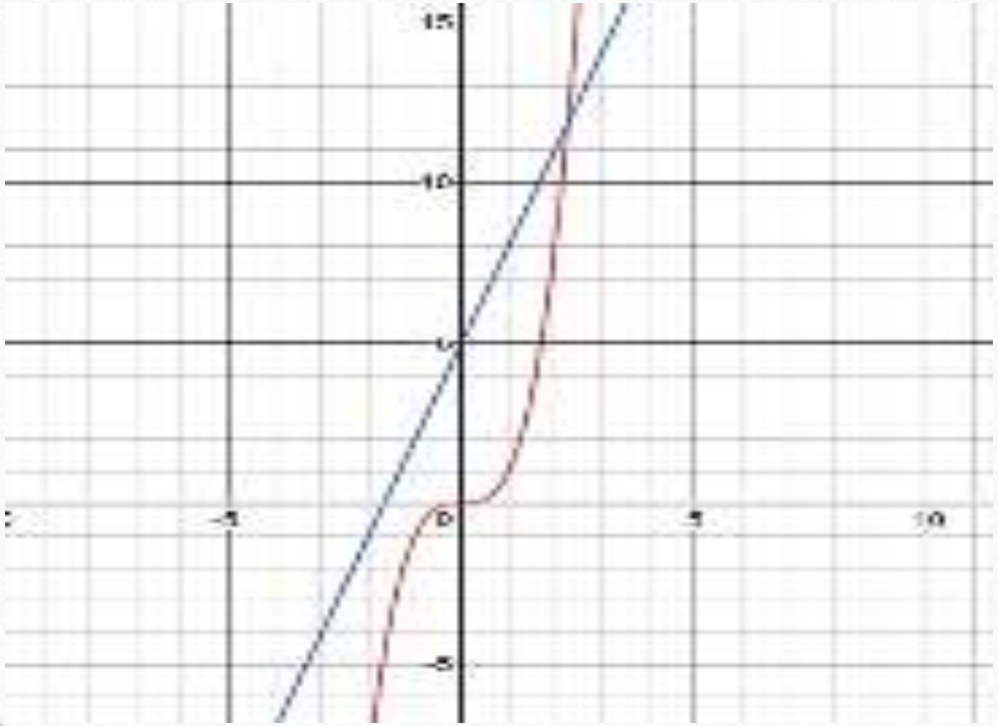
$x_{n+1} = \varphi(x_n)$ формуласы қарапайым итерация әдісінің есептік формуласы болып табылады. Егер $\{x_n\}$ тізбегі n→ ∞ болса, яғни $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ бар және $\varphi(x)$ функциясы үздіксіз, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ теңдігінің шегіне өте отырып және $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ескере отырып, аламыз:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = \varphi(x^*).$$

Сонымен $x^* = \varphi(x^*)$, демек $x = \varphi(x)$ теңдеуінің түбірі - x^*

$f(x) = 0$ теңдеуін түрлі тәсілдермен оған баламалы $x = \varphi(x)$ теңдеуімен алмастыруға болады. Бұл ретте әрдайым түбірге $x_{n+1} = \varphi(x_n)$жақындау тізбегінің шегі бола бермейді. Егер алынған тізбектің шегі болмаса, онда басқа $\{x_n\}$ тізбегінің шегін таба алатындай $x = \varphi(x)$ түріндегі түрлендіруді алу керек. Алынған шек $x = \varphi(x)$ теңдеуінің түбірі болып табылады, яғни $f(x) = 0$ теңдеудің де.

Мысал. $x^3 - 3x - 5 = 0$ теңдеуінің түбірін табыңыз.
Шешуі:
Өрнекті $x^3 = 3x + 5$ түріне келтіреміз.
Графикалық әдісті пайдалана отырып, бұл теңдеудің бір түбірі бар екенін көруге болады. $y = x^3$ функциясы $y = 3x + 5$ функциясына қарағанда жылдамырақ өскендіктен басқа қиылысу нүктелері жоқ.



$y = x^3 - 3x - 5$ функциясы $[2; 3]$ кесіндісінде үздіксіз және $f(2) = -3 < 0 f(3) = 13 > 0$ болғандықтан, $x^3 - 3x - 5 = 0$ теңдеуінің түбірі $[2; 3]$ кесіндісіне тиісті.

Түбірді анықтаудың екі әдісін қарастырайық.
1 әдіс: жартысын бөлу әдісі.
Теңдеудің түбірін $\varepsilon = 0{,}01$дейінгі дәлдікпен табамыз.
$f(2{,}5) = 3{,}125 > 0$, яғни түбір $[2; 2{,}5]$ аралығына тиісті.
$f(2{,}25) < 0$, яғни түбір $[2{,}25; 2{,}5]$ аралығына тиісті.
$f(2{,}375) > 0$, яғни түбір $[2{,}25; 2{,}375]$ аралығына тиісті.
$f(2{,}3125) > 0$, яғни түбір $[2{,}25; 2{,}3125]$ аралығына тиісті.
$f(2{,}28125) > 0$, яғни түбір $[2{,}25; 2{,}28125]$ аралығына тиісті.
$f(2{,}265625) < 0$, яғни түбір $[2{,}265625; 2{,}28125]$ аралығына тиісті.
$2\varepsilon = 0{,}02$ және $2{,}28125 - 2{,}265625 = 0{,}015625 < 0{,}02$болғандықтан теңдеудің түбірі шамамен$\frac{2{,}28125 + 2{,}265625}{2} = 2{,}2734375$ тең.

2-әдіс: қарапайым итерация әдісі.
$x^3 - 3x - 5 = 0$ теңдеуін түрлі әдіспен $x = \varphi(x)$ беруге болады.
$x = \frac{x^3-5}{3}$ түрінде беру ең қолайлысы. Бастапқы жуықтау ретінде$x_0 = 2$ аламыз. $x_{n+1} = \frac{{x_n}^3-5}{3}$ формуласымен тізбектеп жуықтауды есептейміз және тібекті аламыз: 2; 1; -1,33333; -2,45679; -6,60958; -97,91654; … . Алайда, алынған тізбектің шегі жоқ, сондықтан біз бастапқы теңдеуді$x = \frac{x^3-5}{3}$ түрінде көрсете отырып, түбірдің жуық мәнін таба алмаймыз. Бұл жағдайда теңдеуді $x = \sqrt[3]{3x+5}$ түрінде қолданған жөн. Бастапқы жуықтау ретінде $x_0 = 2$ қоямыз.

n ұлғайған кезде тізбектің мүшелері 2,27902 санына ұмтылады деп болжауға болады. Бұл жағдайда 2,27902 саны теңдеу түбірінің жуық мәні болып табылады. Алынған сан теңдеудің түбірі болып табылатындығын тексеру үшін, $[2{,}279015; 2{,}279025]$кесіндінің ұштарындағы $y = x^3 - 3x - 5$функциясының мәнін есептеуге болады. Алынды:$f(2{,}279015) = -0{,}000047\ldots < 0$ және $f(2{,}279025) = 0{,}000078 > 0$. Яғни, 2,27902 саны $x^3 - 3x - 5 = 0$ теңдеуінің жуық мәні болып табылады.
Әртүрлі әдістермен шешу кезінде алынған мәндердегі айырмашылықтар,
әр жағдайда дәлдіктің әр түрлі дәрежесіне байланысты. Егер жартысын бөлу әдісімен шешу кезінде процесті тағы екі қадамға жалғастырса, онда 2,279296875 мәнін аламыз.