8. Ошибки при проверке гипотез

8.1. Ошибки первого и второго рода

Когда вы проводите проверку гипотезы, ваш последний шаг - отклонить или принять нулевую гипотезу. Когда такое решение принимается после проведения проверки гипотезы, оно может быть правильным или неправильным. Вы никогда не можете быть абсолютно уверены, что приняли правильное решение, поскольку вам приходится полагаться на ограниченное количество доказательств. Ситуация аналогична ситуации в судебном процессе, когда обвиняемый признан виновным или невиновным на основании представленных доказательств. В этом случае возможны четыре ситуации (которые являются взаимоисключающими).

Подсудимый невиновен и признан невиновным: в этом случае решение является правильным.

Подсудимый невиновен, но признан виновным: в этом случае решение является неправильным.

Подсудимый виновен, но признан невиновным: в этом случае решение является неправильным.

Подсудимый виновен и признан виновным: в этом случае решение является правильным.

Предположим, что в уголовном суде обвиняемый считается невиновным, если не будет признан виновным «вне разумного сомнения». Первоначальное предположение о невиновности эквивалентно нулевой гипотезе, а теория о том, что обвиняемый виновен, эквивалентна альтернативной гипотезе. Решение о том, что представляет собой «вне разумного сомнения», эквивалентно установлению уровня значимости. Аналогичным образом, при проверке гипотезы существуют четыре возможных ситуации, опять же взаимоисключающие.

H_0 верно и H_0 принято: решение правильное.

H_0 верно, но H_0 отклонено: решение неправильное.

H_0 не верна, но H_0 принимается: решение неправильное.

H_0 не верна, и H_0 отклоняется: решение правильное.

Вы можете видеть, что есть два разных способа принятия неправильного решения. Чтобы различать их, они называются ошибками I-го и II-го рода.

<u>Ошибка I-го рода</u> возникает при отклонении верной нулевой гипотезы.
<u>Ошибка II-го рода</u> возникает при принятии неверной нулевой гипотезы.

Принятие неправильного решения может быть дорогостоящим по различным причинам. Например, предположим, проверяется правильность работы пожарной сигнализации после отключения питания.. Вы можете принять в качестве нулевой и альтернативной гипотезы:

H_0: сигнализация работает правильно.

H_1: сигнализация работает неправильно.

Ошибка I-го рода в этой ситуации будет означать, что вы предполагаете, что сигнализация работает правильно, хотя на самом деле это не так. Это может привести к травме, гибели людей или повреждению имущества. Ошибка II-го рода будет означать, что вы думали, что сигнализация не работает правильно, хотя на самом деле это было. Это может означать расходы на ненужный ремонт или замену.

Примеры, приведенные далее, должны помочь вам понять, что важно оценивать риск ошибок при проведении проверки гипотез. Для этого нужно рассчитать:

P(Ошибка I-го рода)=P(отклонение H_0 | H_0 верна) и

P(Ошибка II-го рода)=P(принятие H_0 | H_0 неверна)

В дальнейшем будет показано, как рассчитываются эти вероятности при проверке различных гипотез, которые вы встречали ранее.

8.2. Ошибки I-го и II-го рода при проверке гипотез с нормальным распределением

Если вы вернетесь к примерам, в которых рассматривались непрерывные случайные величины, вы увидите, что вероятность попадания статистики теста в область отклонения, когда H_0 верна, равна уровню значимости теста. Если тестовая статистика попадает в область отклонения, то H_0 будет отклонена, даже когда она верна; то есть совершена ошибка I-го рода.

Если тестовая статистика является непрерывной случайной величиной, то P(Ошибка I-го рода) равна уровню значимости теста (проверки).

Таким образом, выбор уровня значимости для проверки гипотезы связан со значением P(Ошибка I-го

рода), которое вы готовы принять. Выбор уровня значимости должен в первую очередь зависеть от того, насколько серьезны последствия ошибки I-го рода. Чем серьезнее последствия, тем ниже значение уровня значимости, который следует использовать. Например, если последствия ошибки I-го рода не будут серьезными, вы можете использовать уровень значимости 10%; а если последствия будут очень серьезными, вы можете использовать уровень значимости 0,1%.
Ошибка II-го рода предполагает принятие ложной нулевой гипотезы, что означает, что вы не можете обнаружить разницу в μ . Вы ожидаете, что вероятность того, что это произойдет, будет зависеть от того, насколько изменилось μ: если μ изменилась ненамного, она может легко остаться незамеченной, но если μ изменилась намного, то вы ожидаете обнаружить это. Вот почему альтернативная гипотеза должна быть определена более точно, прежде чем можно будет рассчитать P(Ошибка II-го рода). Следующий пример иллюстрирует метод.

Пример 8.2.1.

Машина наполняет «литровые» бутылки с водой. Когда машина работает правильно, содержимое бутылок распределена по нормальному закону распределения со средним значением 1.002 литра и стандартным отклонением 0.002 литра. Производительность машины регулярно проверяется путем отбора выборки из 9 бутылок и расчета среднего значения содержимого этих 9-ти бутылок . Если это среднее значение падает ниже определенного значения, предполагается, что машина работает неправильно, и она останавливается.
(а) Сформулируйте нулевую и альтернативную гипотезу для проверки правильности работы машины.
(б) Для проверки гипотезы с уровнем значимости 5% найдите область отклонения, взяв среднее значение выборки в качестве статистики теста.
(в) Найдите значение вероятности ошибка I-го рода.
(г) Найти P(Ошибка II-го рода), если среднее значение содержания бутылок упало до номинального значения 1.000 литр.
(д) Найти диапазон значений μ, для которого вероятность ошибки II-го рода меньше 0,001.

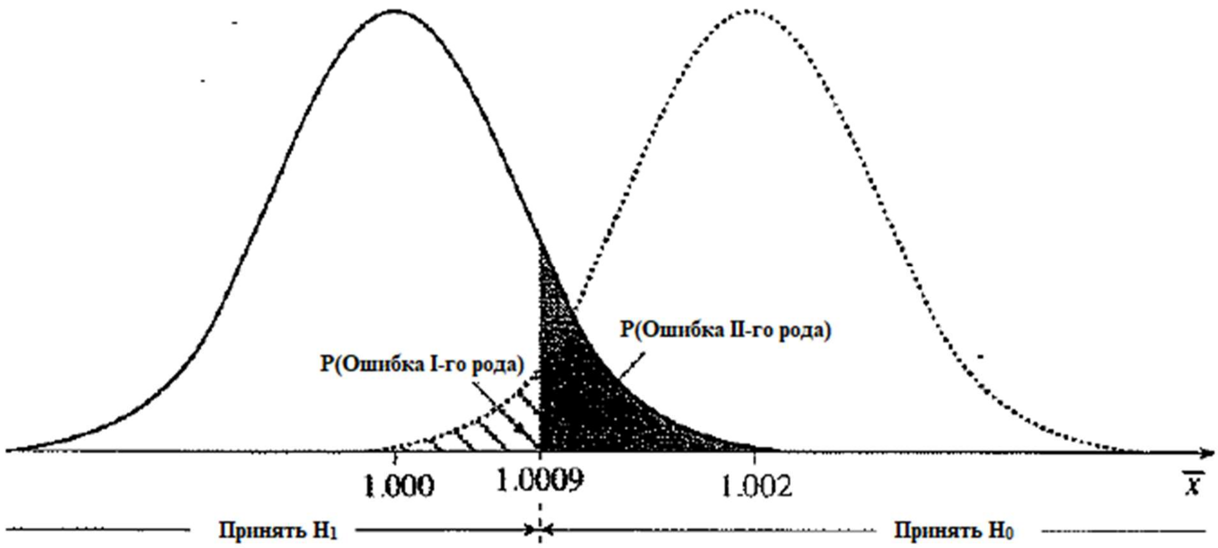
Решение:

(а) $H_0 : \mu = 1.002$ (машина работает правильно)
$H_1 : \mu < 1.002$ (машина работает неправильно, то есть среднее значение упало)
(б) Если H_0 верна, то $\bar{X} \sim N\left(1.002; \frac{0.002^2}{9}\right)$. Для односторонней проверки на уменьшение с уровнем значимости 5%, область отклонения для тестовой статистики Z: $Z \leq -1.645$. Поскольку $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$,
значить:
$\frac{\bar{X}-1.002}{\sqrt{\frac{0.002^2}{9}}} \leq -1.645$, отсюда: $\bar{X} \leq 1.00090 \ldots = 1.0009$, с точностью до четырех знаков после запятой.
(в) Для статистики теста являющей непрерывной случайной величиной,
P(Ошибка I-го рода) = уровень значимости = 0.05
(г) P(Ошибка II-го рода) = P(принятие H_0 | H_0 неверна) =
= $P(\bar{X} > 1.0009 \mid \mu = 1.000)$, что означает вероятность того, что $\bar{X}$ находится в области принятия, при условии что μ уже не 1.002, а 1.000, то есть:

$$P(\bar{X} > 1.0009 \mid \mu = 1.000) = P\left(Z > \frac{1.00090 \ldots - 1.000}{\sqrt{\frac{0.002^2}{9}}}\right) = P(Z > 1.355) =$$

$$= 1 - \Phi(1.355) = 1 - 0.9123 = 0.0877$$

Эти результаты иллюстрируются на следующем рисунке. Пунктирная кривая показывает распределение $\bar{X}$, если H_0 верна, а сплошная кривая показывает распределение, если H_1 истинно, и среднее значение упало до 1.000. Заштрихованная область показывает P(Ошибка I-го рода), а закрашенная область показывает P(Ошибка II-го рода).



(д) Сначала найдите значение z, для которого вероятность ошибки II-го рода равна 0,001. Как видно из пункта (г), для этого необходимо, чтобы Ф(z)=0.999), значит z=3.090.
Значение μ соответствующее этому значению z, может быть получено из:
$z = 3.090 = \frac{1.000}{\sqrt{\frac{0.002^2}{9}}}$, решая которое, получим: $\mu = 0.9988$. Таким образом, при $\mu < 0.9988$ вероятность ошибки II-го рода меньше 0.0001.
В этом примере установка уровня значимости на уровне 5% означает что с вероятность 5% остановят правильно работающую машину. При этом уровне значимости вероятность не обнаружить, что среднее содержание бутылок упало до нормального значения 1.000 литров, составляет 8,77%. Интересно посмотреть, что происходит с P(Ошибка II-го рода), когда используется более низкий уровень значимости. Это показано в следующем примере.

Пример 8.2.2.

Решите пункты (б), (в), (г) предыдущего примера с уровнем значимости 1%.
Решение:
(б) Для односторонней проверки на уменьшение с уровнем значимости 1%, область отклонения для тестовой статистики Z: $Z \leq -2.326$. Значить:
$\frac{\bar{X}-1.002}{\sqrt{\frac{0.002^2}{9}}} \leq -2.326$, отсюда: $\bar{X} \leq 1.00045$.
(в) P(Ошибка I-го рода) = уровень значимости = 0.01
(г) P(Ошибка II-го рода) = P(принятие H_0 | H_0 неверна) =
= $P(\bar{X} > 1.00045 \mid \mu = 1.000)$, что означает вероятность того, что $\bar{X}$ находится в области принятия, при условии что μ уже не 1.002, а 1.000, то есть:

$$P(\bar{X} > 1.00045 \mid \mu = 1.000) = P\left(Z > \frac{1.00045 - 1.000}{\sqrt{\frac{0.002^2}{9}}}\right) = P(Z > 0.674) =$$

$= 1 - \Phi(0.674) = 1 - 0.7499 = 0.2501$

В этом случае, то есть на уровне значимости 1%, значение P(Ошибка I-го рода) уменьшилась, тогда как значение P(Ошибка II-го рода) увеличилась. Это стоило ожидать, глядя на предыдущий рисунок. Если критическое значение изменяется так, что один тип ошибки увеличивается, то другой тип ошибки уменьшается. Это означает, что при установлении уровня значимости может возникнуть необходимость оценить риски, связанные с совершением обоих типов ошибок, и сбалансировать один из них с другим. Единственный способ уменьшить погрешность обоих типов одновременно - взять большую выборку, чтобы пересечение распределений на рисунке уменьшилось.
Следующий пример показывает, как вычислить P(Ошибку II-го рода) для двухсторонней проверки на изменение.

Пример 8.2.3.

Вес коробок с высушенными бобами фасоли распределен по нормальному закону распределения со средним значением μ грамм и стандартным отклонением 15 грамм. Проверка нулевой гипотезы $\mu = 375$

против альтернативной гипотезы $\mu \neq 375$ проводится с уровнем значимости 5% на случайной выборке из 16 коробок.
(a) Для каких значений выборочного среднего принимается альтернативная гипотеза?
(b) Учитывая, что фактическое значение μ равно 380, найдите вероятность совершения ошибки II-го рода.
Решение:
(a) Если H_0 верна, то $\bar{X} \sim N\left(375; \frac{15^2}{16}\right)$. Для двухсторонней проверки на изменение с уровнем значимости 5%, область отклонения: $|Z| \geq 1.96$
Тогда, $Z = \frac{\bar{X}-375}{\sqrt{\frac{15^2}{16}}}$. При Z=1.96, $\bar{X} = 382.35$, и $Z = -1.96$, $\bar{X} = 367.65$.
То есть, принимается альтернативная гипотеза при:
$\bar{X} \geq 382.35$ или $\bar{X} \leq 367.65$
(б) Р(Ошибка II-го рода) = $P(\, 367.65 < \bar{X} < 382.35 \mid \mu = 380\,) =$
$$= P\left(\frac{367.65 - 380}{\sqrt{\frac{15^2}{16}}} < Z < \frac{382.35 - 380}{\sqrt{\frac{15^2}{16}}}\right) = P(-3.293 < Z < 0.627) =$$
$= \Phi(0.627) - \big(1 - \Phi(3.293)\big) = 0.7347 - (1 - 0.9995) = 0.734$, с точностью до трех знаков после запятой.

8.3. Ошибки I-го и II-го рода при проверке гипотез с биномиальным распределением
Ранее мы сталкивались, что для дискретного распределения обычно невозможно найти область отклонения, которая точно соответствует указанному (номинальному) уровню значимости.
Пример 8.3.1.
Проверяющий подозревает, что операторы, работающие с пружинными весами, не хотят указывать 0 в качестве последнего значения зарегистрированного веса при взвешивании, например, 4.10 или 0.30. Чтобы проверить свою гипотезу, он берет случайную выборку из 40 зарегистрированных весов и считает количество зарегистрированных весов X, которые заканчиваются на 0.
(а) Сформулируйте подходящую гипотезу, включающую вероятность, для проверки гипотезы, которая могла бы указать, избегают ли операторы окончания зарегистрированного веса на 0.
(б) Покажите, что при проверке данной гипотезы с уровнем значимости 10%, нулевая гипотеза отклоняется при X=1, но не отклоняется при X=2.
(в) Укажите область отклонения для X
(г) Вычислите значение Р(Ошибки I-го рода)
(д) Номинальный уровень значимости этого теста составляет 10%. Каков фактический уровень значимости теста?
Решение:
(а) Если операторы не избегают окончания записанного веса на цифру 0, то вероятность того, что значение записанного веса, выбранное случайным образом, заканчивается на 0, равна 0,1; если они избегают 0, то эта вероятность будет меньше 0,1, поэтому возьмем H_0: p = 0.1 и H_1: p <0.1.
(б) Если H_0 верна, то X~B(40; 0.1).
$P(X \leq 1) = C_{40}^{0} 0.1^0 0.9^{40} + C_{40}^{1} 0.1^1 0.9^{39} = 0.01478 \ldots + 0.06569 \ldots =$
$= 0.08047 \ldots$
Так как 0.08047…<0.1, то H_0 отклоняется при X=1
$P(X \leq 2) = 0.08047 \ldots + C_{40}^{2} 0.1^2 0.9^{39} = 0.22280 \ldots$
Так как 0.22280…>0.1, H_0 не отклоняется при X=2
(в) Область отклонения: $X \leq 1$
(г) Р(Ошибка I-го рода) = $P(\, X \leq 1 \mid p = 0.1\,) = 0.08047 \ldots = 0.0805$, с точностью до трех значащих цифр.
(д) Фактический уровень значимости теста равен Р(Ошибка I-го рода), то есть 8.05%
Это не совсем то же самое, что желаемый уровень значимости (в данном примере 10%), и такое часто встречается при проверках с дискретными случайными величинами.

Для проверки гипотезы, включающей дискретную случайную величину, область отклонения определяется таким образом, что:

Р(тестовая статистика попадает в область отклонения | H_0 верна) $\leq$ номинальная значимость теста.
Фактический уровень значимости теста
= Р(тестовая статистика попадает в область отклонения | H_0 верна)
и это также вероятность ошибки I-го рода.

В следующем примере показано как вычислять Р(Ошибки II-го рода).

Пример 8.3.2.

Поставщик семян орхидей утверждает, что их всхожесть составляет 0.95. Покупатель семян подозревает, что всхожесть ниже. Чтобы проверить эту гипотезу, покупатель сажает 20 семян в аналогичных условиях, и подсчитывает количество проросших семян X. Он отклоняет гипотезу, если $X \leq 17$.

(а) Сформулируйте подходящую нулевую и альтернативную гипотезу для проверки утверждения поставщика семян.

(б) Какова вероятность ошибки I-го рода при использовании этого теста?

(в) Вычислите Р(Ошибки II-го рода), если вероятность того, что семя прорастет, на самом деле равна 0.80.

Решение:

(а) $H_0 : p = 0.95$, и $H_1 : p < 0.95$.

(б) Если H_0 верна, то $X \sim B(20; 0.95)$.

Р(Ошибка I-го рода) = $P(\,X \leq 17 \ \mid p = 0.95\,) = 1 - P(\,X \geq 18 \ \mid p = 0.95\,) =$

$= 1 - C_{20}^{18} 0.95^{18} 0.05^{2} - C_{20}^{19} 0.95^{19} 0.05^{1} - C_{20}^{20} 0.95^{20} 0.05^{0} =$

$= 1 - 0.18867 \ldots - 0.37735 \ldots - 0.35848 \ldots = 0.07548 = 0.0755$, с точностью до трех значащих цифр.

(в) Р(Ошибка II рода) = $P(\,X \geq 18 \ \mid p = 0.8\,) =$

$= C_{20}^{18} 0.8^{18} 0.2^{2} + C_{20}^{19} 0.8^{19} 0.2^{1} + C_{20}^{20} 0.8^{20} 0.2^{0} =$

$= 0.13690 \ldots + 0.05746 \ldots + 0.01152 = 0.20608 = 0.2061$, с точностью до трех значащих цифр.

Значение Р(Ошибки II-го рода) в этом примере указывает на то, что вероятность того, что проверка гипотезы не сможет обнаружить падение уровня прорастания с 0.95 до 0.80, не является незначительной.

Для больших выборок легче найти область отклонения, которая дает Р(Ошибки I-го рода), близкую к требуемому уровню значимости. Как вы видели ранее, тестирование доли генеральной совокупности для большой выборки выполняется с использованием нормального распределения как приближение биномиального распределения. В следующем примере показано, как вычислить Р(Ошибка I-го рода) и Р(Ошибка II-рода) в этой ситуации.

Пример 8.3.3.

Производитель утверждает, что вероятность неисправности электрического предохранителя составляет не более 0.03. Покупатель проверяет это утверждение, проверяя коробку из 500 предохранителей. Проверка гипотезы проводится с уровнем значимости 5% с использованием X – количества неисправных предохранителей в коробке 500, в качестве тестовой статистики.

(а) При каких значениях X вы пришли бы к выводу, что вероятность неисправности предохранителя больше 0.03?

(б) Оцените Р(Ошибки I-го рода) для этой проверки.

(в) Оцените Р(Ошибки II-го рода) если вероятность неисправности предохранителя фактически равна 0.06

Решение:

(а) Нулевая и альтернативная гипотеза: $H_0 : p = 0.03$ и $H_1 : p > 0.03$ соответственно. Если H_0 верна, то $X \sim B(500; 0.03)$.

$\mu = np = 500 \cdot 0.03 = 15$ и $\sigma^2 = npq = 500 \cdot 0.03 \cdot 0.97 = 14.55$

Используем приближение нормальным распределением, то есть случайную величине
$X \sim B(500; 0.03)$ аппроксимируем случайной величиной $V \sim N(15; 14.55)$.

Односторонней проверки на увеличение с уровнем значимости 5%, H_0 отклоняется, если $Z \geq 1.645$.

Соответствующая этому область отклонения X:

$\frac{X-0.5-15}{\sqrt{14.55}} \geq 1.645$ (в расчеты включена коррекция непрерывности)

Решая это неравенство, получим: $X \geq 21.77 \ldots$

Область отклонения: $X \geq 22$, путем округления до следующего целого числа

(б) Р(Ошибка I-го рода) = $P(X \geq 22)$, предполагая, что H_0 верна.

Используем случайную величину V ~ N(15; 14.55) в качестве приближения,
$\mathrm{P}(X \geq 22) = P(V \geq 21.5)$, с учетом коррекции непрерывности.
Р(Ошибка I-го рода) = $\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{21.5-15}{\sqrt{14.55}}\right) = P(Z \geq 1.704) = 1 - 098558 =$
$= 0.0442$
В этом случае фактический уровень значимости 4,42% довольно близок к номинальному значению 5%.
(в) Если p = 0.06, то случайная величина X может быть приближена случайной величиной:
$V \sim N(500 \cdot 0.06; 500 \cdot 0.06 \cdot 0.94) = N(30; 28.2)$
Р(Ошибка II-го рода) = $P(X < 22) = P(V < 21.5) = P\left(Z < \frac{21.5-30}{\sqrt{28.2}}\right) =$
$= P(Z < -1.601) = 1 - \Phi(1.601) = 1 - 0.9453 = 0.0547$

8.4. Ошибки I-го и II-го рода при проверке гипотез с распределением Пуассона

Примеры с распределением Пуассона обрабатываются так же, как и с биномиальным распределением.

Пример 8.4.1.

При тщательном обследовании дюнных земель было установлено, что среднее количество растений определенного вида составило 10 растений на квадратный метр. Предполагается, что после очень сухого сезона эти растения имеют тенденцию отмирать. Для проверки этой гипотезы выбирают случайно выбранную площадь 1 квадратный метр и подсчитывают количество растений X этого вида, растущих на этой площади. Если X больше 4, предполагается, что погода не оказывает влияния. Вы можете предположить, что распределение случайной величины X может быть смоделировано распределением Пуассона.
(а) Сформулируйте нулевую и альтернативную гипотезу.
(б) Чему равна P(Ошибки I-го рода)?
(в) Рассчитайте Р(Ошибка II-го рода), если среднее количество растений на квадратный метр изменилось на (i) 8 (ii) 4.
Считаете ли вы, что предположение о модели Пуассона, вероятно, будет оправдано в этой ситуации?

Решение:

(а) $H_0: \lambda = 10$ и $H_1: \lambda < 10$
(б) Р(Ошибка I-го рода) = $P(\, X \leq 4 \mid \lambda = 10\,) =$
$$= e^{-10} + e^{-10}\frac{10^1}{1!} + e^{-10}\frac{10^2}{2!} + e^{-10}\frac{10^3}{3!} + e^{-10}\frac{10^4}{4!} =$$
$= 0.000045 \ldots + 0.000453 \ldots + 0.002269 \ldots + 0.007566 \ldots + 0.018916 \ldots =$
$= 0.02925 \ldots = 0.0293$, с точностью до трех значащих цифр.
(в) (i) Р(Ошибка II-го рода) = $P(\, X > 4 \mid \lambda = 8\,) = 1 - P(\, X \leq 4 \mid \lambda = 8\,) =$
$$= 1 - e^{-8} - e^{-8}\frac{8^1}{1!} - e^{-8}\frac{8^2}{2!} - e^{-8}\frac{8^3}{3!} - e^{-8}\frac{8^4}{4!} = 1 - 0.000335 \ldots -$$
$-0.002683 \ldots - 0.010734 \ldots - 0.028626 \ldots - 0.057252 \ldots =$
$= 0.9003 \ldots = 0.900$, с точностью до трех значащих цифр.
(в) (ii) Р(Ошибка II-го рода) = $P(\, X > 4 \mid \lambda = 4\,) = 1 - P(\, X \leq 4 \mid \lambda = 4\,) =$
$$= 1 - e^{-4} - e^{-4}\frac{4^1}{1!} - e^{-4}\frac{4^2}{2!} - e^{-4}\frac{4^3}{3!} - e^{-4}\frac{4^4}{4!} = 1 - 0.01831 \ldots -$$
$-0.07326 \ldots - 0.14652 \ldots - 0.19536 \ldots - 0.19536 \ldots =$
$= 0.3711 \ldots = 0.371$, с точностью до трех значащих цифр.
Как и следовало ожидать, Р(Ошибка II-го рода) уменьшается вместе с уменьшением λ.
Если растения распределены случайным образом, то распределение Пуассона должно быть хорошей моделью. Если растения размножаются семенами, которые распространяются ветром, то они, вероятно, будут распределены случайным образом. Однако, если они размножаются подземными корнями, растения могут встречаться группами.

Пример 8.4.2.

Было установлено, что среднее количество дефектов на 100 метров длины пряжи, произведенной машиной, составляет 7. После обслуживания машины количество дефектов X в первых 300 метрах пряжи, произведенной машиной, составляет 27.
(а) Проведите двухстороннюю проверку на изменение с уровнем значимости 5%, чтобы проверить, изменилось среднее количество дефектов, произведенных машиной.
(б) Для каких значений X нулевая гипотеза будет отклонена?
(в) Оцените фактический уровень значимости теста.

(г) Оцените P(Ошибка II-го рода), если среднее значение изменилось до 10.

Решение:

(а) Предполагая, что дефекты возникают независимо и случайным образом, подходящей моделью для случайной величины X будет распределение Пуассона.

$H_0: \lambda = 7$ и $H_1: \lambda \neq 7$, где λ – среднее количество дефектов на 100 метров пряжи. Если H_0 верна, то $X \sim Po(3 \cdot 7) = Po(21)$. Так как 21>15, случайная величина X~Po(21) может быть приближена случайной величиной Y~N(21;21).

$$P(X \geq 27) = P(Y \geq 26.5) = P\left(Z \geq \frac{26.5 - 21}{\sqrt{21}}\right) = P(Z \geq 1.200 \ldots)$$

Область отклонения для двухсторонней проверки на изменение с уровнем значимости 5%: $|Z| \geq 1.96$. Так как 1.200…<1.96, H_0 принимается, то есть недостаточно доказательств того, что среднее количество дефектов изменилось.

(б) Нулевая гипотеза отклоняется для $|Z| \geq 1.96$. Соответствующая ей область отклонения для X: $\frac{X-0.5-2}{\sqrt{21}} \geq 1.96$ и $\frac{X+0.5-21}{\sqrt{21}} \geq 1.96$. Решая эти неравенства, получим: $X \geq 30.38 \ldots$ и $X \leq 11.51 \ldots$.

Поскольку X должен быть целым числом, область отклонения принимается за: $X \geq 31$ и $X \leq 11$.

(в) Фактический уровень значимости теста:

$P(X \geq 31$ или $X \leq 11 \mid X \sim Po(21))$

Снова используя нормальное приближение: Y~N(21; 21),

$$P(X \geq 31) = P(Y \geq 30.5) = P\left(Z \geq \frac{30.5 - 21}{\sqrt{21}}\right) = P(Z \geq 2.073) =$$

$$= 1 - \Phi(2.073) = 1 - 0.9809 = 0.0191$$

По симметрии: $P(X \leq 11) = 0.0191$

Поэтому фактический уровень значимости теста: $2 \cdot 0.0191 = 0.0382$

(г) При λ=10, P(Ошибка II-го рода) = $P(11 < X < 31 \mid X \sim Po(30))$

Аппроксимируя X~Po(30) случайной величиной Y ~ N(30; 30).

$$P(11 < X < 31) = P(11.5 < Y < 30.5) = P\left(\frac{11.5 - 30}{\sqrt{30}} < Z < \frac{30.5 - 30}{\sqrt{30}}\right) =$$

$$= P(-3.378 < Z < 0.091) = \Phi(0.091) - \left(1 - \Phi(3.378)\right) =$$

$$= 0.5363 - (1 - 1.000) = 0.5363$$

Значение Φ(3.378) находится вне диапазона таблицы нормального распределения; его значение принимается равным 1.000.