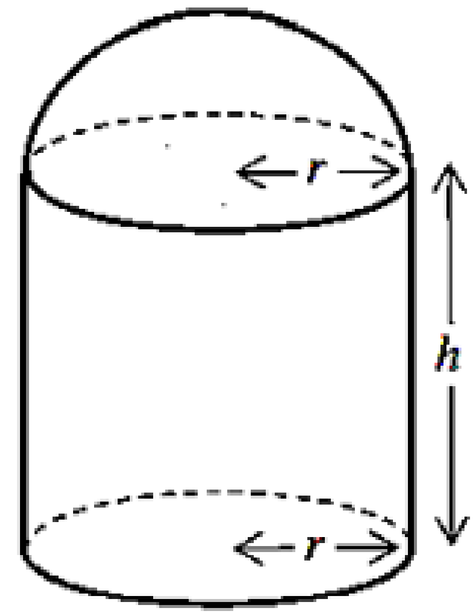
Сабақтың тақырыбы

Ньютонның салқындау заңы

Сабақтың мақсаты

12.5.3.3 органикалық өзгеріс үдерістерінің қарапайым дифференциалдық теңдеулерін шығару

2 тапсырма. Суретте радиусы r см және биіктігі h см, радиусы r см жарты шарға қосылған цилиндрден тұратын контейнер көрсетілген. Цилиндрдің жоғарғы қақпағы жоқ және жоғарыдан жарты шарға қосылған. Цилиндр табаны жабық, сондықтан алынған контейнер толығымен мөрленеді.



a) Контейнер көлемі 2880π см³ тең. Контейнердің толық бетінің ауданын $S = \frac{5\pi}{3r}(r^3 + 3456)$ формуласы арқылы есептеуге болатындығын дәлелдеңіз.

b) Стационарлық нүктесі S болғандағы r мәнін табыңыз.

c) (b) бөлігінде табылған r мәні S үшін минималды мән беретінін көрсетіңіз.

d) S минималды болғандағы h мәнін анықтаңыз.

Жауабы: b) r = 12 см; d) h = 12 см.

Куба Республикасында рак ауруымен ауыратындардың денсаулығын жақсарту үшін «Centruroides anchorellus» шаянның уынан дәрі шығарыла бастады. Шаянның бұл түрінің улылығы қабынуға қарсы әсері бар, сонымен қатар кубалық фармацевттердің пікірінше, бұл ісіктердің, соның ішінде қатерлі ісіктердің өсуін тоқтата алады.

Фармацевттер «Centruroides anchorellus Scorpion» популяциясын өсіру үшін фермалар құрды, нәтижесінде N шаяндар саны (жүздеген), t жылдар өткеннен кейін сүі мына дифференциалдық теңдеумен модельделеді:

1 литр уда = 100 мың препараттың пакеті
1 литр у = 10 млн доллар

$$\frac{dN}{dt} = N$$

(a) t уақытына тәуелді N үшін жалпы шешімін анықтаңыз.
(b) t = 0 болғандағы N = 100 дербес шешімін анықтаңыз.
(c) t = 5 кезінде N = 10 000 болғандағы дербес шешімін анықтаңыз.
(d) t ($t = \infty$) өте үлкен болғанда «Centruroides anchorellus» шаяндарының саны қаншаға өзгереді?

$N = 67{,}38e^{t}$

Шаяндар саны шексіздікке ұмтылады. Шарт ешқашан келесі себептер бойынша орындалмайды:

- адамдарды бақылау;
- еркек шаяндарды әйел шаяндардың жеуі, бір-бірінің эмбриондарын жеу – осыған ешқандай бақылау жоқ.

Табиғатта кездесетін тағы бір көрсеткіш теңдеу

Ньютонның салқындау заңы

3. «Дененің салқындату заңы» немесе Ньютон заңы-дифференциалдық теңдеумен сипатталған уақытқа байланысты дене температурасының өзгеру заңы:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_{\text{орт}}),$$

мұндағы T (t) – t уақыт кезіндегі дене температурасы, $T_{\text{орт}}$- ауа температурасы (салқындату ортасы).

ДТ жалпы шешімі:

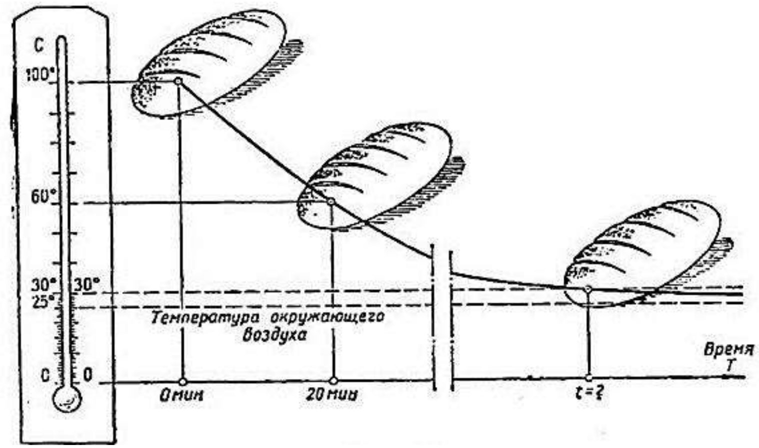
$$T(t) = T_{\text{орт}} + Ce^{kt}.$$

Егер бастапқы саны T_0 болса, онда ДТ жалпы шешімі келесі түрде қабылданады:

$$T(t) = T_{\text{орт}} + (T_0 - T_{\text{орт}})e^{kt}.$$

Жылу алмасуға есеп

Пештен шығарылған нанның температурасы 20 минутта 100^0-тан 60^0-қа дейін төмендейді. Ауа температурасы 25^0-ге тең. Қанша уақыттан соң нанның температурасы суыту басталған сәттен 30^0-ге дейін төмендейді?



Белгіленуі	Заңдылық	Бастапқы шарт	Қосымща шарттар	Есептің сұрағы
$T(t)-t$ минут уақыт кезіндегі нанның температурасы (°C), $T_{орт}$ – ортаның температурасы (°C)	$\frac{dT}{dt}=k(T-T_{орт})$	$T(0)=100°C$ $T_{орт}=25°C$	$T(20)=60°C$	$T(?)=30°C$

Шешуі.

$\frac{dT}{dt} = k(T-25)$ – айнымалылары бөлінетін дифференциалдық теңдеу, демек $\frac{dT}{T-25} = kdt$.

Интегралдау арқылы аламыз: $\int \frac{dT}{T-25} = \int kdt, \quad \to \quad \ln|T-25| = kt + \ln C$

Соңғы теңдіктің екі жағын потенциалдау арқылы аламыз:

$$e^{\ln|T-25|} = e^{kt}e^{\ln c} \Rightarrow T-25 = Ce^{kt}$$

шығады. $t = 0$ мин, *T=100°* болғандағы бастапқы шартқа сәйкес *C* тұрақты шаманы анықтаймыз. Бұдан

$100 - 25 = Ce^{k\cdot 0} = C \quad \to \quad C = 75$. $t = 20$ мин, *T=60°* қосымша шарты бойынша e^k шамасын анықтаймыз.

Сонымен:

$$60 - 25 = 75(e^k)^{20} \quad \to \quad e^k = \left(\frac{35}{75}\right)^{\frac{1}{20}} = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}$$

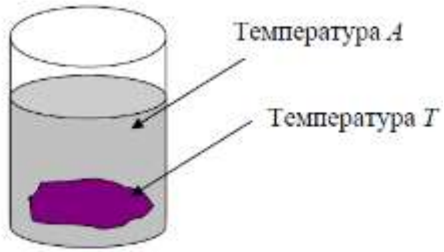
Біздің есебіміздің шартына сәйкес нанның суу теңдеуі:

$$T = 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}} + 25.$$

Бұл теңдеуден нанның температурасына сәйкес ізделінді t уақыт анықталады: T=30°: $\frac{1}{15} = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}t}$.

Сондықтан, $t = \frac{-20ln15}{ln7 - ln15} \approx 71$ мин. ■

Мысал № 1. **Ньютон ашқан салқындау заңы басқаша айтқанда келесі түрде болады: денең температурасының $T(t)$ өзгеру жылдамдығы (осы жерде температураның уақытқа t байланысты өзгеру жылдамдығы) T дене температурасы және А қоршаған ортаның температурасы мен айырмасына пропорционал.**



$\frac{dT}{dt} = -k(T - A)$, **мұндағы** k**- оң тұрақты, егер** $T > A$**, онда**

$\frac{dT}{dt} < 0$ **температурасы кемиді, дене суиды. Егер** $T < A$**, онда**

$\frac{dT}{dt} > 0$ **T – өседі.**

Сонымен физикалық заң дифференциал теңдеумен өрнектелген. Алдағы уақытта егер k және A –ның мәндері белгілі болса, $T(t)$ **формуласын табу арқылы дененің температурасын кез-келген уақытқа болжау жасауға болады.**

450°F температурада пісетін пицца, пештен сағат 5:00 pm температурасы 70°F болатын бөлмеге шығарылып қойылды. 5 минуттан кейін пиццаның температурасы 300°F болды. Сіз осы пиццаны температурасы 135°F болғанда жегіңіз келсе, оны қандай уақытта жей аласыз?

$$u(t)=70+(450-70)e^{kt}$$

$$u(5)=70+(450-70)e^{k5}=300$$

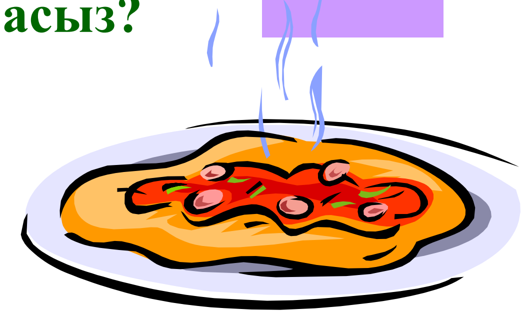
Алдымен 5 минуттан кейін температура 300° болғанын қолдана отырып *k* табамыз

***k* үшін шығарамыз**

$$380e^{5k}=230$$

$$k=\frac{\ln\left(\frac{230}{380}\right)}{5}\approx .1004184$$

450°F температурада пісетін пицца, пештен сағат 5:00 pm температурасы 70°F болатын бөлмеге шығарылып қойылды. 5 минуттан кейін пиццаның температурасы 300°F болды. Сіз осы пиццаны температурасы 135°F болғанда жегіңіз келсе, оны қандай уақытта жей аласыз?



Енді бізде *k* мәні бар, енді біз сұраққа жауап бере аламыз

$$k \approx .1004184$$

$$135 = 70 + (450 - 70)e^{kt}$$

Сонымен, сағат 5:18 сіз пиццаны жей аласыз

t **үшін шығарамыз**

$$\frac{65}{380} = e^{kt}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{65}{380}\right)}{.1004184} \approx 18 \text{ } минут$$

- Температурасы 25^{0}С асүйде 180^{0}С температурада пісірілген мраморлы етінен жасалған стейк пештен сағат 20:30 шығарылады. 10 минуттан кейін стейк температурасы 120^{0}С болды. Егер сіз оның температурасы 70^{0}С болатынын қаласаңыз, кешкі аста стейкті нешеде жеуге болады ?

4. Осыдан, кешкі уақыттың басталу уақыты: 20:30 + (22 мин. 38 сек.)

Кешкі астың басталу уақыты: 20 сағат 52 мин. 38 сек.

Дененің сууы туралы есеп.

1 – тапсырма. Ауаның температурасы 20^0C тең, 20 минут ішінде дене 100^0C –тан 60^0C – қа дейін температураға суитыны белгілі. t уақытына байланысты T дененің температураның өзгеру заңын және қанша t уақытта 25^0C болады?

Шешуі: Есептің шарты бойынша айнымалы уақыт пен дене температурасы болып табылады.

Оның ішінде, уақыт t – тәуелсіз айнымалы (сағат), ал температура $T(t)^0C$ – функция (Цельсия градус) берілген.

Физикалық заңдылықты пайдаланамыз: Дененің ауадағы суу жылдамдығы, дененің температурасы мен ауаның температурасының айырмасына пропорционал.

Бастапқы шартты көрсетеміз: $t_0=0$ минутта дене температурасы $T_0=100^0C$ тең. Пропорционалдық коэффициентті табу үшін қосымша шарттар берілген: $t_1=20$, $T_1=60^0C$. Есептің сұрағы: егер $T_2=25^0C$ болғанда, t_2 уақытты анықтау керек.

Туындының физикалық мағынасынан температураның өзгеру жылдамдығы дене температурасының уақыт бойынша $-\frac{dT}{dt}$ туындысы болатынын аламыз.

Физикалық заңдылық бойынша теңдеуді жазамыз: $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$.

Жалпы шешімін табамыз: $\int \frac{dT}{T-20} = \int kdt, ln|T - 20| = kt + C,$

$T - 20 = Ce^{kt}$ –**жалпы шешім**. $T = 20 + Ce^{kt}$

Бастапқы шартты қоямыз: $100 = 20 + Ce^{k\cdot 0}$, бұдан $C = 80$.

$T = 20 + 80e^{kt}$– **дербес шешімді** жазамыз.

k коэффициентті табу үшін қосымша шартты пайдаланамыз:

$$60 = 20 + 80e^{20k}, \quad e^{20k} = \frac{1}{2}, 20k = -ln2, k = -\frac{ln2}{20}.$$

Енді ізделінді теңдеудің шешімін төмендегдей жазамыз:

$$T = 20 + 80e^{-\frac{ln2}{20}t}.$$

T_2=25^{0}C болғанда, t_2 уақытты іздейміз: $25 = 20 + 80e^{-\frac{ln2}{20}t}$, $e^{-\frac{ln2}{20}t} = \frac{1}{16}$,

$-\frac{t\cdot ln2}{20} = -4 \cdot ln2, t = 80$ мин.

Жауабы: $\boldsymbol{T = 20 + 80e^{-\frac{ln2}{20}t}, \quad t = 80}$ **минут.**

Задача №2. Задача криминалистов

В 6 часов утра температура трупа была равна 13°C и за три часа позже упала до 9°C. Учитывая, что живое тело имеет температуру 37°C и температура окружающей среды была 5°C, определите время смерти.

Ответ: 12 часов ночи

1. Given a cooling coefficient γ of $0.1\frac{1}{\mathrm{h}}$, how long does it take water at $20^{\circ}\mathrm{C}$ to freeze (reach $0^{\circ}\mathrm{C}$) in air that is $-10^{\circ}\mathrm{C}$?

2. Let there be some amount of liquid helium stored at $0.1\mathrm{K}$. If this helium takes an hour to lower the temperature of oxygen from $1\mathrm{K}$ to $0.2\mathrm{K}$, how long does it take this helium to lower the oxygen from $300\mathrm{K}$ to $200\mathrm{K}$? Ignore the effects of phase change.

3. If some liquid water at $10^{\circ}\mathrm{C}$ is put into a freezer at $-10^{\circ}\mathrm{C}$, it takes an hour to reach $0^{\circ}\mathrm{C}$. If water is put into the freezer, and then an hour later the water's temperature is measured at $10^{\circ}\mathrm{C}$, what was the original temperature of the water?

4. Say that, during the day, air is heated by the sun to a constant $90^\circ\mathrm{F}$. The air's temperature reaches $90^\circ\mathrm{F}$ as soon as the sun comes out, and cannot exceed $90^\circ\mathrm{F}$. Water, however, remains at a constant $60^\circ\mathrm{F}$ throughout the day. During an eight-hour night, the air is cooled to $65^\circ\mathrm{F}$ by interactions with the cooler water according to Newton's law of cooling. During the day, when the air is in equilibrium at $90^\circ\mathrm{F}$, how much does the sun need to heat the air during one hour to counteract the cooling effects of water?

5. A pan at $300^\circ\mathrm{F}$ is taken out of the oven and cools to $80^\circ\mathrm{F}$, which is $5^\circ\mathrm{F}$ above the room's ambient temperature. If this cooling process takes an hour, how long will it take the pan to re-heat to $300^\circ\mathrm{F}$ if the oven is $400^\circ\mathrm{F}$? What temperature does the oven need to be to re-heat the pan in 10 minutes?

7. Newton's Law of Cooling also applies if the room temperature is not constant. Say that the temperature of the room is $400 - 100e^{-t}$ measured in kelvins with t measured in hours. How will a cup of water at $300\mathrm{K}$ behave in this system if $\gamma = 1$?

8. A tank of hot liquid at $300^{\circ}\mathrm{C}$ will cool to $200^{\circ}\mathrm{C}$ in one hour if it is surrounded by an environment of $10^{\circ}\mathrm{C}$. Suppose a heater is placed in the tank and the heater itself is a constant temperature of $305^{\circ}\mathrm{C}$. What does the cooling coefficient from the heater to the water need to be in order for the temperature of the water tank to stay constant?