

Максимум мен
минимумды табуға
есептер

Оқу мақсаты :

12.5.3.2

туындыны қолданып геометриялық және физикалық
мазмұнды есептерді шығарады;

Проверка домашней работы

1. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $S = -\frac{1}{6}t^3 + 2t^2 + 3t + 5$. Найдите максимальную скорость движения точки.

Решение:

$$V(t) = S'(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 4t + 3$$

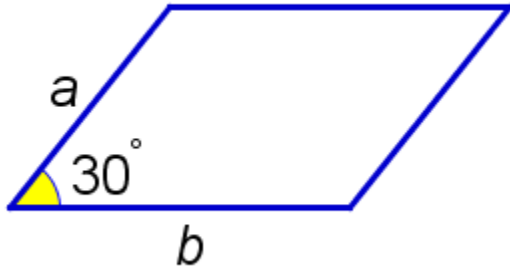
$$V'(t) = -t + 4$$

Найдём критические точки: $V'(t) = -t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ (сек)

$V''(t) = -1 < 0$, значит в точке $t = 4$ — max

$$V(4) = -\frac{1}{2}(4)^2 + 4 \cdot 4 + 3 = 11 \text{ (м/сек)}$$

2. Площадь участка в форме параллелограмма с острым углом 30° равна 8. Какое наименьшее значение принимает его периметр?



$$S = ab \sin 30^\circ = ab \cdot \frac{1}{2} = 8 \Rightarrow a = \frac{16}{b}$$

$$P = 2(a + b) = \frac{32}{b} + 2b$$

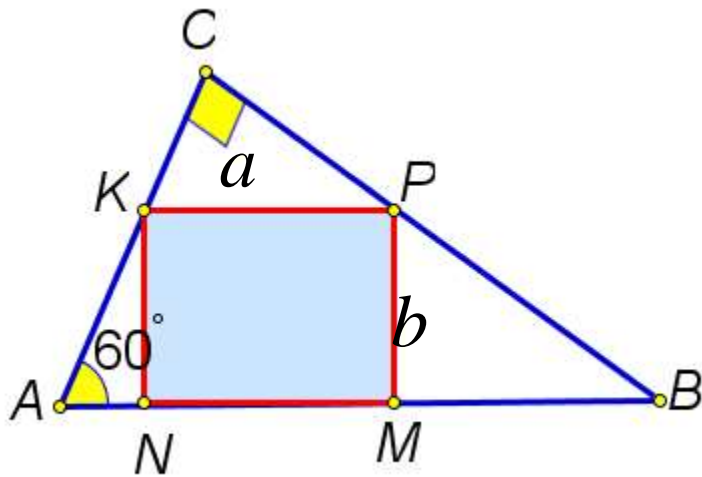
$$P' = -\frac{32}{b^2} + 2 \text{ Найдём критические точки:}$$

$$-\frac{32}{b^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow b = \pm 4 (b > 0, a > 0) \Rightarrow b = 4$$

$$P'' = 1 > 0 \Rightarrow \text{при } b = 4 - \text{min}$$

$$a = 4, b = 4 \Rightarrow P = 16(\text{ед})$$

3. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 16 и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?



$$S_{KPMN} = a \cdot b$$

$$\Delta ANK \quad AN = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta PMB \quad MB = b\sqrt{3}$$

$$AB = AN + a + MB = a + \frac{4\sqrt{3}b}{3} = 16 \Leftrightarrow a = 16 - \frac{4\sqrt{3}b}{3}$$

$$S = \left(16 - \frac{4\sqrt{3}b}{3}\right) \cdot b = 16b - \frac{4\sqrt{3}}{3}b^2$$

$$S' = 16 - \frac{8\sqrt{3}}{3}b = 0 \Leftrightarrow b = 2\sqrt{3}$$

$$S'' = -\frac{8\sqrt{3}}{3} < 0 \Rightarrow \text{в точке } b = 2\sqrt{3} - \text{max}$$

$$a = 16 - \frac{4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{3} = 8$$

Ответ : $8; 2\sqrt{3}$

- 1-қадам: қажетті белгісіздерді енгізу.
- 2-қадам: енгізілген белгісіздер арқылы функцияны құрастыру.
- 3-қадам: құрастырылған функцияның туындысын табу.
- 4-қадам: функцияның кризистік (стационарлық) нүктелерді тауып, олардың түрін анықтау (максимум әлде минимум екені).
- 5-қадам: есептің сұрағына жауап беру.

Мысал 1. Тік төртбұрыш пішінді жер телімін қоршау үшін 120 м дуал қажет. Ауданы ең үлкен болатындай етіп, тік төртбұрыштың өлшемдерін табыңыз.

Шешуі:

1-қадам

x – тік төртбұрыштың ұзындығы болса, енін x арқылы өрнектейміз, мұндағы $0 < x < 60$ және $0 < y < 60$

$P = 2(a + b)$ осы формуладан $2(x + y) = 120$, $x + y = 60$, $y = 60 - x$.

2-қадам

$S = ab$ осыдан $S(x) = \underline{x}(60 - x) = 60x - x^2$.

3-қадам

$S'(x) = 60 - 2x$.

4-қадам

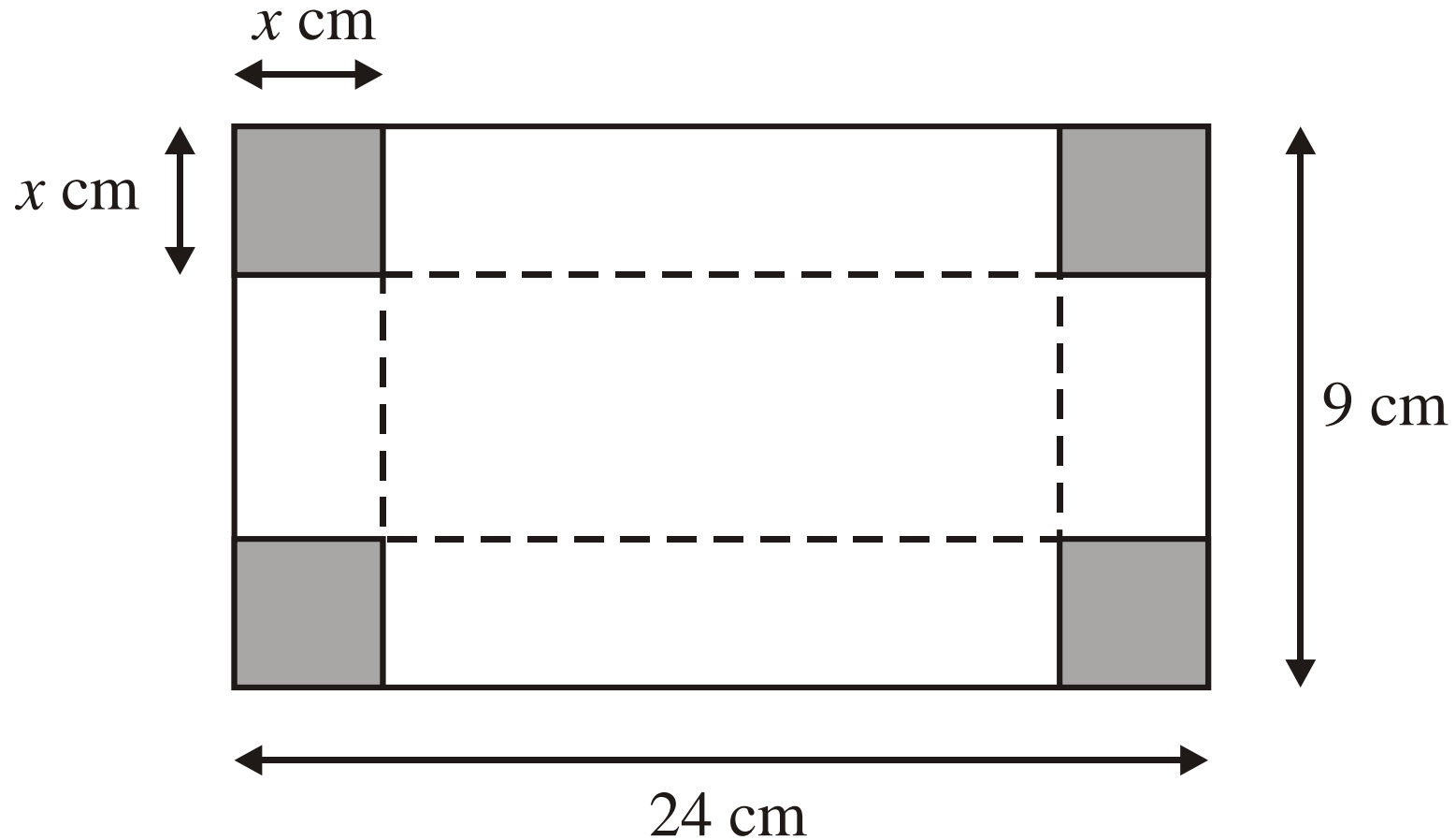
$60 - 2x = 0$, $x = 30$, $y = 60 - 30 = 30$.

$S''(x) = -2 < 0$, сондықтан бұл құрастырылған функцияның максимумы болып табылады..

5-қадам

Ауданы ең үлкен болатындай етіп, тік төртбұрыштың өлшемдері 30 м және 30 м болу қажет.

Мысал 2. Өлшемдері 24×9 болатын тік төртбұрышты темір қаңылтырдың сыйымдылығы (көлемі) ең үлкен болатындай етіп, беті ашық қорап жасау қажет. Қорапшаның өлшемдерін табыңыз.



Шешуі:

1-қадам

Суретте көрсетілгендей қиып тасталатын квадраттардың қабырғасын x арқылы белгілейік. Қорапшаның табаны болатын тік төртбұрыштың қабырғалары сәйкесінше $24 - 2x$ және $9 - 2x$ болады.

2-қадам

$V = abc$ осы формуладан $V = x(24 - 2x)(9 - 2x) = 4x^3 - 66x^2 + 216x$.

3-қадам

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 132x + 216$$

4-қадам

$$\frac{dV}{dx} = 0 \text{ осыдан } x^2 - 11x + 18 = 0$$

$$x = \underline{2}, \underline{x} = 9$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 132$$

$$x = 2 \Rightarrow \frac{d^2V}{dx^2} = -84 \text{ (немесе } \underline{\underline{< 0}})$$

максимум нүктесі

5-қадам/

Көлемі ең үлкен болатындай етіп, қорапшаның өлшемдері 2 м, 20 м және 5 м болу қажет.

Максимум мен минимумды табуға есептер

№1.

Дұрыс үшбұрышты призманың табан қабырғасы x см, биіктігі – l см. Призманың көлемі 250 см^2 -қа тең.

a) l -ді x арқылы өрнектеңіз.

b) Толық беті келесі формула бойынша есептелетінін көрсетіңіз: $A = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x^2 + \frac{200}{x} \right)$

c) Ауданның ең кіші мәнін тауып, оны $k \sqrt{3}$ түрінде жазыңыз.

d) Бұл мән ең кіші болатынын тексеріңіз.

Максимум мен минимумды табуға есептер

- №2.

Суретте цилиндр пішінді ыдыс көрсетілген. Оның радиусы мен биіктігі сәйкесінше r мен h -қа тең. Цилиндрдің толық беті 30000 см^3 -қа тең.

- Цилиндрдің көлемі келесі формула бойынша есептелетінін көрсетіңіз: $V = 15000r - \pi r^2$.
- Цилиндрдің ең үлкен мәнін табыңыз және бұл мән ең үлкен болатынын көрсетіңіз.

- №3.

- Радиусы R -ге тең дөңгелектен қандай секторды қиып алғанда, оның қалған бөлігінен көлемі ең үлкен конус жасауға болады

Максимум мен минимумды табуға есептер

- №4.
- Кубтарының қосындысы ең аз болатындай етіп, 12-ні екі қосылғышқа жіктеңіз.

- №5.

Радиусы R -ге тең сфераға іштей сызылған көлемі ең үлкен цилиндрдің радиусын табыңыз.

Жауаптары:

№1.

$$\text{a) } l = \frac{1000\sqrt{3}}{3x^2}$$

$$\text{c) } 150\sqrt{3}$$

№2.

$$\text{b) } 399\,000 \text{ см}^2$$

№3.

$$\frac{6\pi - 2\sqrt{6}\pi}{3}$$

№4.

$$12 = 6 + 6$$

№5.

$$\sqrt{\frac{2}{3}} R$$

Example : 1

The sum of one number and three times a second number is 60. Among the possible numbers which satisfy this condition, find the pair whose product is as large as possible

1. Let one number be x and the other number be y .
Let P be the product.

2. What quantity is to be maximised? **Product**

3. Express the product P as a function of x and y .

$$P = xy$$

4. Write down a relationship between x and y as given in the first sentence.

$$y + 3x = 60$$

5. Express P as a function of x only.

$$P = x(60 - 3x) = 60x - 3x^2$$

6. Find the derivative of P .

$$P' = 60 - 6x$$

7. The product will be a maximum when the derivative of P is 0.

$$60 - 6x = 0$$

$$x = 10$$

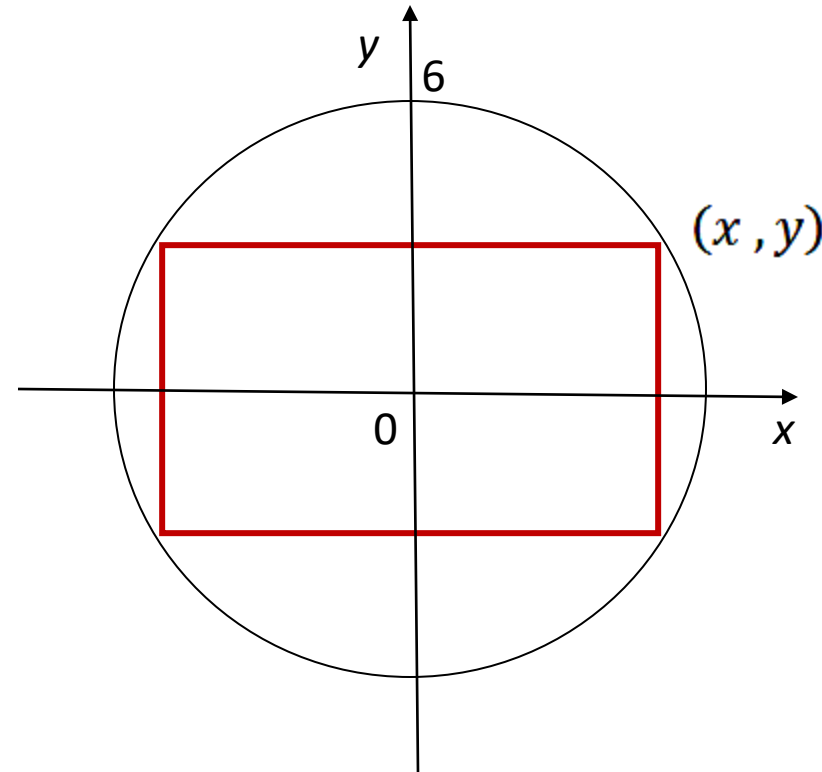
$$y = 30$$

The two numbers are 10 and 30

Example : 2

Find the dimensions of the rectangle of maximum area that can be inscribed in a circle of radius 6 units.

Draw a diagram.
Label the point where the rectangle touches the circumference of the circle

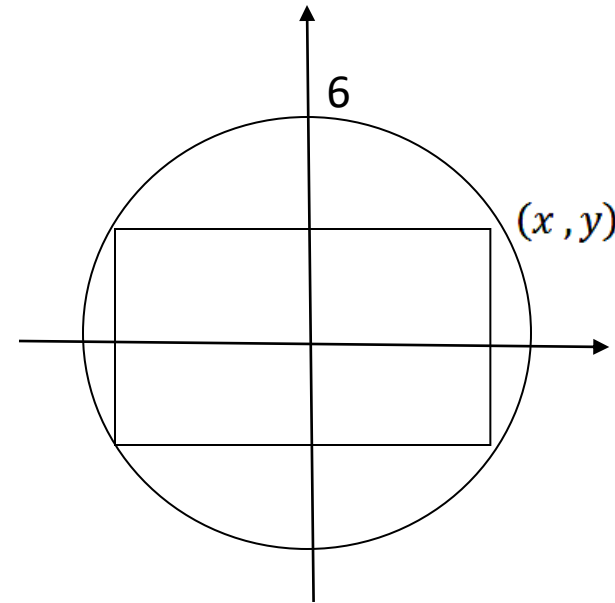


What is to be at a maximum?

Area of the rectangle

Write the *area* of the rectangle
as a function of x and y .

$$\text{Area}_{\text{rectangle}} = 4xy$$



What is the equation of the circle?

$$x^2 + y^2 = 36$$

Express y as a function of x .

$$y = \sqrt{36 - x^2}$$

Express the *area* of
the rectangle as a
function of x only.

$$\text{Area}_{\text{rectangle}} = 4x\sqrt{36 - x^2}$$

Find dA/dx .

$$\begin{aligned} A' &= 4\sqrt{36 - x^2} + \frac{4x \left(\frac{1}{2}\right) (-2x)}{\sqrt{36 - x^2}} \\ &= \frac{4(36 - x^2) - 4x^2}{\sqrt{36 - x^2}} \\ &= \frac{144 - 8x^2}{\sqrt{36 - x^2}} \end{aligned}$$

Find the critical values of x

$$\frac{144 - 8x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0$$

critical values of x :
 ± 6 and $\pm 3\sqrt{2}$

Determine which critical value/s are valid.

$$x = \pm 3\sqrt{2}$$

$$x \neq \pm 6$$

Calculate the dimensions of the rectangle

$$y = \sqrt{36 - x^2}$$

$$y = \pm 3\sqrt{2}$$

the dimensions of the rectangle are :

$$\boxed{6\sqrt{2} \text{ by } 6\sqrt{2}}$$