H_0 верно и H_0 принято: решение правильное.
H_0 верно, но H_0 отклонено: решение неправильное.
H_0 не верна, но H_0 принимается: решение неправильное.
H_0 не верна, и H_0 отклоняется: решение правильное.
Вы можете видеть, что есть два разных способа принятия неправильного решения. Чтобы различать их, они называются ошибками I-го и II-го рода.

P(Ошибка I-го рода)=P(отклонение H_0 | H_0 верна) и
P(Ошибка II-го рода)=P(принятие H_0 | H_0 неверна)
В дальнейшем будет показано, как рассчитываются эти вероятности при проверке различных гипотез, которые вы встречали ранее.

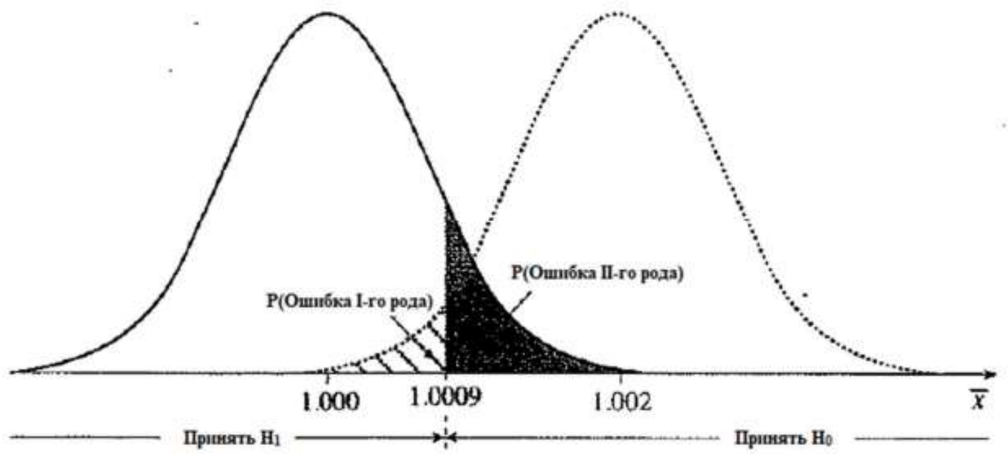
Пример 8.2.1.
Машина наполняет «литровые» бутылки с водой. Когда машина работает правильно, содержимое бутылок распределена по нормальному закону распределения со средним значением 1.002 литра и стандартным отклонением 0.002 литра. Производительность машины регулярно проверяется путем отбора выборки из 9 бутылок и расчета среднего значения содержимого этих 9-ти бутылок . Если это среднее значение падает ниже определенного значения, предполагается, что машина работает неправильно, и она останавливается.
(а) Сформулируйте нулевую и альтернативную гипотезу для проверки правильности работы машины.
(б) Для проверки гипотезы с уровнем значимости 5% найдите область отклонения, взяв среднее значение выборки в качестве статистики теста.
(в) Найдите значение вероятности ошибка I-го рода.
(г) Найти P(Ошибка II-го рода), если среднее значение содержания бутылок упало до номинального значения 1.000 литр.
(д) Найти диапазон значений μ, для которого вероятность ошибки II-го рода меньше 0,001.

Решение:
(а) $H_0: \mu = 1.002$ (машина работает правильно)
$H_1: \mu < 1.002$ (машина работает неправильно, то есть среднее значение упало)
(б) Если H_0 верна, то $\bar{X} \sim N\left(1.002; \frac{0.002^2}{9}\right)$. Для односторонней проверки на уменьшение с уровнем значимости 5%, область отклонения для тестовой статистики Z: $Z \leq -1.645$. Поскольку $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$,

значить:
$\frac{\bar{X}-1.002}{\sqrt{\frac{0.002^2}{9}}} \leq -1.645$, отсюда: $\bar{X} \leq 1.00090 \ldots = 1.0009$, с точностью до четырех знаков после запятой.
(в) Для статистики теста являющей непрерывной случайной величиной,
P(Ошибка I-го рода) = уровень значимости = 0.05
(г) P(Ошибка II-го рода) = P(принятие H_0 | H_0 неверна) =
$= P(\bar{X} > 1.0009 \mid \mu = 1.000)$, что означает вероятность того, что $\bar{X}$ находится в области принятия, при условии что μ уже не 1.002, а 1.000, то есть:

$$P(\bar{X} > 1.0009 \mid \mu = 1.000) = P\left(Z > \frac{1.00090 \ldots - 1.000}{\sqrt{\frac{0.002^2}{9}}}\right) = P(Z > 1.355) =$$

$= 1 - \Phi(1.355) = 1 - 0.9123 = 0.0877$
Эти результаты иллюстрируются на следующем рисунке. Пунктирная кривая показывает распределение $\bar{X}$, если H_0 верна, а сплошная кривая показывает распределение, если H_1 истинно, и среднее значение упало до 1.000. Заштрихованная область показывает P(Ошибка I-го рода), а закрашенная область показывает P(Ошибка II-го рода).



(д) Сначала найдите значение z, для которого вероятность ошибки II-го рода равна 0,001. Как видно из пункта (г), для этого необходимо, чтобы $\Phi(z)$=0.999), значит z=3.090.
Значение μ соответствующее этому значению z, может быть получено из:
$z = 3.090 = \frac{1.000}{\sqrt{\frac{0.002^2}{9}}}$, решая которое, получим: $\mu = 0.9988$. Таким образом, при $\mu < 0.9988$ вероятность ошибки II-го рода меньше 0.0001.
В этом примере установка уровня значимости на уровне 5% означает что с вероятность 5% остановят правильно работающую машину. При этом уровне значимости вероятность не обнаружить, что среднее содержание бутылок упало до нормального значения 1.000 литров, составляет 8,77%. Интересно

Пример 8.2.3.
Вес коробок с высушенными бобами фасоли распределен по нормальному закону распределения со средним значением μ грамм и стандартным отклонением 15 грамм. Проверка нулевой гипотезы $\mu = 375$

против альтернативной гипотезы $\mu \neq 375$ проводится с уровнем значимости 5% на случайной выборке из 16 коробок.
(a) Для каких значений выборочного среднего принимается альтернативная гипотеза?
(b) Учитывая, что фактическое значение μ равно 380, найдите вероятность совершения ошибки II-го рода.

Сатып алушылардың бір дүкенде өткізген уақыты орташа есеппен 12,5 минутты және стандартты ауытқу 4,2 минутты құрады. Дүкеннің жұмыс істеу уақыты өзгергеннен кейін кездейсоқ таңдалған 50 сатып алушылардың дүкенде өткізген орташа уақыты 13,5 минутты құрады. Стандартты ауытқу 4,2 минутта қалады деп есептесек, сатып алушылардың дүкенде өткізген орташа уақытының өзгеруін 5% маңыздылық деңгейімен тексеріңіз. І типті қатенің ықтималдығын көрсетіңіз. [3]

8-мысал. Бір компанияда компьютердің бұзылуының аптасына орташа көрсеткіші 2,1. Жаңартудан кейін басшылық орташа мәннің өзгергенін анықтағысы келеді. Кездейсоқ таңдалған 20 апта ішінде 54 компьютер бұзылды. Орта мәннің өзгеруін 5% маңыздылық деңгейімен тексеріңіздер. [3]