

Бөлім:

- Интегралдау мен дифференциалдау арқылы қолданбалы есептерді шешу

Сабақ тақырыбы:

Өзгеру жылдамдықтары

Оқу мақсаттары

12.5.3.3 органикалық өзгеріс үдерістерінің қарапайым дифференциалдық теңдеулерін шығару;

12.5.3.2 қарапайым жағдайларда дифференциалдық теңдеулерді құрастыру және шығару;

*Органикалық өзгеріс
үдерістерінің қарапайым
дифференциалдық теңдеулерін
шығару 3 этаптан тұрады:*

- 1. Теңдеу құрастыру*
- 2. Теңдеудің шешімін табу*
- 3. Қойылған сұраққа жауап
іздеу(шешімді зерттеу)*

Дененің сууы туралы есеп.

1 – тапсырма. Ауаның температурасы 20°C тең, 20 минут ішінде дене 100°C –тан 60°C – қа дейін температураға суитыны белгілі. t уақытына байланысты T дененің температураның өзгеру заңын және қанша t уақытта 25°C болады?

Жауабы: $T = 20 + 80e^{-\frac{\ln 2}{20}t}$, $t = 80$ минут.

2. Бөлме ауасының температурасы 0°C тең, 20 минут ішінде дене 25°C –тан 20°C – қа дейін температураға суитыны белгілі. Қанша t уақытта T дененің температурасы 10°C болады?

3. Егер радиоактивті заттың 0,2 бөлігі 3 сағатта ыдырайтын болса, онда радиоактивті заттың жартылай ыдырау мөлшері қанша уақытта болады?

Егер айнымалы шама z белгілі бір t уақытта өзгертін болса, онда оның өзгеру жылдамдығы туынды арқылы анықталады: $\frac{dz}{dt}$

x және y айнымалылары арасындағы тәуелділікке сүйене отырып, келесідей t параметріне тәуелді теңестікті алуға болады:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

1-Мысал.

Сфера тәріздес шар $5\text{ м}^3/\text{с}$ жылдамдықпен үрленуде. Белгілі бір уақыт мезетінде шардың радиусы 4 м -ге тең. Шар радиусының өзгеру жылдамдығын табыңыз.

Берілгені:

$$\frac{dV}{dt} = 5 \quad \text{Табу керек:} \quad \frac{dr}{dt}$$

Шешуі:

Шар көлемі: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$ $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$

$$\frac{dV}{dr} \Big|_{r=4} = 4\pi(4)^2 = 64\pi$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{64\pi} \times 5 \quad \longrightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{5}{64\pi} = 0.249 \text{ м/с}$$

2-мысал.

Радиусы r -ге, ал биіктігі $3r$ -ге тең цилиндр тәрізді ыдысқа су құйылуда. Су биіктігінің өзгеру жылдамдығы $0,5\text{ м/с}$. Радиусы $2,5\text{ м}$ болған кездегі су көлемінің өзгеру жылдамдығын табыңыз.

$$\frac{dh}{dt} = 0.5$$

Су көлемінің өзгеру жылдамдығы:

$$\frac{dV}{dt} = ?$$

Цилиндр көлемі:

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \times 3r = 3\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \underline{\underline{88.4\text{ м}^3/\text{с}}}$$

Су дөңгелек тәріздес бассейн жасап жерге құйылып жатыр. Бассейннің радиусы минутына 9 см жылдамдықпен артып жатыр. Радиусы 12 см болған кезде бассейннің ауданы неғұрлым тез қалай артады?

[3]

$\frac{dr}{dt} = 9$	B1
$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$	M1
$\frac{dA}{dt} \Big _{r=12} = 216\pi$	A1

Болат шар 700°с температураға дейін қызады. Содан кейін шар ұнтақ тәрізді мұз контейнеріне салынып, салқындатылады.

Шарды салқындату жылдамдығы оның температурасына пропорционалды екені белгілі.

a) $\frac{dT}{dt} = -bT$ теңдеуі неліктен шарды салқындату процесінің математикалық моделі

екенін түсіндіріңіз, мұндағы T – салқындату үшін орналастырылғаннан кейін t секунд уақыттағы шардың температурасы (°C), b – оң тұрақты.

[2]

b) Мұзға орналастырылған шар 30 секунд ішінде 500°С дейін салқындайтыны белгілі $T = 700 e^{-0,00112 t}$ екенін көрсетіңіз.

[7]

6 а	$\frac{dT}{dt}$ – уақыт өткен сайын шардын температурасының өзгеру жылдамдығы, b – оң коэффициент, $-b$ температураның төмендеуін көрсетеді	B2	B1 әрбір түсініктеме үшін
-----	---	----	---------------------------

6 б	$dt = -\frac{1}{bT} dT$	M1
	$t = -\frac{1}{b} \ln T + k$ немесе эквивалент	A1
	$T = 700^\circ C, t = 0$ болғанда алатынымыз $0 = -\frac{1}{b} \ln 700 + k \Rightarrow k = \frac{1}{a} \ln 700$ немесе эквивалент	B1
	$t = \frac{1}{b} (\ln 700 - \ln T) \Rightarrow t = \frac{1}{b} \ln \frac{700}{T}$	A1
	$T = 500^\circ C, t = 30$ болғанда алатынымыз $30 = \frac{1}{b} \ln \frac{700}{500} \Rightarrow$	M1
	$\Rightarrow b \approx 0,0112$ немесе эквивалент	A1
	$T = 700e^{-0,00112t}$	B1

Дөңгелек тәріздес мұнай таңбасының радиусы минутына 1.2 см жылдамдықпен үлкейеді. Радиусы 25 см болғанда мұнай таңбасы ауданының өзгеру жылдамдығын табыңыз.

Сонымен, радиусы 25 см болғанда мұнай таңбасы ауданының өзгеру жылдамдығы жуық шамамен $188.5 \text{ см}^2/\text{мин}$ болады.

Кубтың көлемі $24 \text{ см}^3/\text{сек}$ жылдамдықпен артады. Көлем 1000 см^3 болғанда кубтың қыры қандай жылдамдықпен өсетінін анықтаңыз.

Сонымен, кубтың қыры $0.08 \text{ см}/\text{сек}$ жылдамдықпен өседі.

Қышқылға салынған қатты шар тәрізді дене формасын сақтай отырып секундына 2% жылдамдықпен ериді. Оның көлемінің пайызбен өзгеру жылдамдығы қандай?

Бұдан шардың көлемі секундына 6 пайызға кемітінін көруге болады.

Табанының радиусы 10 см, биіктігі 50 см төңкерілген конус тәріздес ыдысқа $5 \text{ см}^3/\text{мин}$ жылдамдықпен су құюда (сурет А). Судың деңгейі 10 см биіктікке жеткенде оның көтерілу жылдамдығы қандай болатынын анықтаңыз.

Сонымен, судың деңгейі 10 см биіктікке жеткенде оның деңгейінің көтерілу жылдамдығы жуық шамамен $0.4 \text{ см}/\text{сек}$ болады.

Сфера тәріздес резеңке шардан $5 \text{ см}^3/\text{мин}$ жылдамдықпен жел шығуда. Шардың радиусы 10 см болғанда оның бетінің ауданының өзгеру жылдамдығын табыңыз.

Сонымен, шар бетінің ауданы $1 \text{ см}^2/\text{мин}$ жылдамдықпен кемиді.

3 тапсырма. Температура моделі, T° Цельсийде шай шәйнектен құйылғаннан кейін $T = 63 \times 3^{-\left(\frac{x}{A}\right)} + 21$ өрнектеледі, мұндағы A оң тұрақты болады.

(a) үлгіні қолданыңыз:

(i) бір кесе шай құйылған кездегі оның температурасын табыңыз;

(ii) шайдың ұзақ уақыт тұрған кездегі температурасын болжаңыз.

(b) теңдеуді түрлендіре отырып, және логарифмдеу арқылы $A \ln\left(\frac{63}{T-21}\right) = x \ln 3$, екенін көрсетіңіз.

(c) $x = 15$ болғандағы $T = 40$ берілген, A мәнін табыңыз, жауапты үш санға дейін беріңіз.

3. (a) (i) $x = 0$ $T = 84$

(ii) $x \rightarrow \infty$ $T = 21$

(c) $A = 13,7$

4. (a) $14 \text{ (м}^3\text{)}$

(b) $t = 12$, $V'(t) = -0.5e^{-1}$ ($= -0,1839..$)

Таңба кері \Rightarrow көлем кеміді

(c) 08:19

Рефлексия

- *Не үйрендім?*
- *Негізгі жақсарту керек?*