10.28 Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

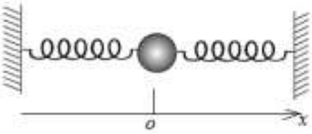

рисунок 1

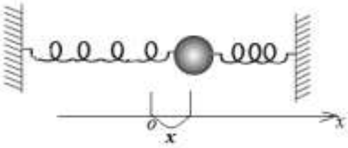

рисунок 2

Запомни!

Функция называется решением дифференциального уравнения, если она удовлетворяет дифференциальному уравнению.

ПРИМЕР. Убедись, что $y = \sin \alpha t$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dfrac{d^2 y}{dt^2} = -\alpha^2 y$.

Решение: $y = \sin \alpha t \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = (\sin \alpha t)' = \alpha \cos \alpha t$, $\dfrac{d^2 y}{dt^2} = (\alpha \cos \alpha t)' = -\alpha^2 \sin \alpha t$.

Однако, ты знаешь, что $y = \sin \alpha t$ и подставишь в это уравнение $\dfrac{d^2 y}{dt^2} = -\alpha^2 \sin \alpha t$, получишь $\dfrac{d^2 y}{dt^2} = -\alpha^2 y$.

<KEY> Определение. Процессы, которые в той или иной степени повторяются во времени, называются колебаниями.
</KEY>

<MAIN> Пусть шарик определенной массы, обозначим её m, прикреплён пружинами таким образом, как показано на рисунке 1. Отметим, что в положении равновесия координата центра данного шарика будет равна нулю. Теперь сместим данный шарик в направлении оси *Ox* так, как показано на рисунке 2.

Р. Гук
(1635–1703)

Закон Гука

Сила упругости, возникающая при упругой деформации растяжения или сжатия тела, пропорциональна абсолютному значению изменения длины тела

Согласно закону Гука на шарик будет действовать сила, пропорциональная смещению *x*:

$$F = -kx, \quad \text{где } k > 0.$$

Обрати внимание!

Знак минус указывает на то, что восстанавливающая сила направлена в сторону, противоположную направлению смещения.

Опираясь на второй закон Ньютона, имеешь $F = ma$.

Приравниваешь силы и получаешь, $ma = -kx$.

Зная, что ускорение прямолинейного движения *a* есть вторая производная координаты пути по времени *t*, то есть $a = \dfrac{d^2 x}{dt^2}$.

Подставишь в равенство $ma = -kx$, преобразуешь $ma + kx = 0$, $\quad a + \dfrac{k}{m}x = 0$ и запишешь $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = 0$.

Заменишь $\dfrac{k}{m}$ через ω, то есть $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ и получишь $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$.

Ты знаешь, что данное уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Итак, если физическая величина изменяется во времени в соответствии с полученным уравнением $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$, то говорят, что она совершает гармонические колебания, поэтому данное уравнение $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ называется дифференциальным уравнением гармонических колебаний.

Напомним себе, как решается линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Реши дифференциальное уравнение $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$.

Составь характеристическое уравнение $k^2+\omega^2=0$.

Находишь корни квадратного уравнения $k_1=\omega i,\ k_2=-\omega i$.

Общее решение уравнения $x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$.

Если заменишь произвольные постоянные C_1 и C_2 новыми произвольными постоянными через A и φ, которые будут связаны с C_1 и C_2 определенными соотношениями такими, как $C_1=A\sin\varphi$, $C_2=A\cos\varphi$, тогда общее решение уравнения $x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$ примет следующий вид: $x=A\sin\varphi\cos\omega t+A\cos\varphi\sin\omega t$, а при применении формулы сложения $x=A\sin\varphi(\omega t+\varphi)$.

Уравнение $x=A\sin\varphi(\omega t+\varphi)$ называется уравнением гармонических колебаний.

Величина A представляет собой наибольшее отклонение тела от положения равновесия.

Величину A называют амплитудой колебания, её можно найти по формуле $A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$.

Период – время, за которое система возвращается в исходное состояние, фаза колебаний получает приращение 2π.

Величину $\omega=\frac{2\pi}{T}$ называют циклической частотой колебания.

Величину φ называют начальной фазой гармонического колебания, которую можно найти по формуле $tg\varphi=\frac{C_1}{C_2}$.

ПРИМЕР 1. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой 6 см и периодом равным 2 секунды. Напиши уравнение движения точки, зная, что её движение начинается из положения x_0 = 3 см.

Решение: Уравнение гармонических колебаний запишешь $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$.

По условию $A=6$ см, $T=2$ сек. В начальный момент времени $t=0$ положение точки $x(0)=A\cos(\omega_0\cdot 0+\varphi)=A\cos\varphi,\ x_0=A\cos\varphi$.

Найдешь начальную фазу $\cos\varphi=\frac{x_0}{A}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\quad \cos\varphi=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}$.

Угловая частота колебаний $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ с$^{-1}$.

Подставляешь найденные значения амплитуды, начальной фазы, угловой частоты колебания в уравнение колебаний и получаешь уравнение движения точки $x=0{,}06\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$.

</MAIN>
<ACT> 10.1 Частица совершает простое гармоническое движение. Отклонение от центра колебания частицы равно x метрам за время t секунд.

a) Покажи, что $x(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t$ является общим решением дифференциального уравнения $x'' + 16x = 0$.
b) Известны начальные условия $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. Определи амплитуду колебания частицы.

</ACT>
<ACT> 10.2 Материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0{,}4\cos(2\pi t + \frac{\pi}{2})$ м. Найди:

a) амплитуду колебаний;
b) период колебаний;
c) начальную фазу колебаний;
d) максимальную скорость точки;
e) максимальное ускорение точки. </ACT>

ПРИМЕР 2. Груз массой 5 кг подвешан на пружине. Длина пружины равна 0,2 м. Действует сила 16 Н, которая растягивает пружину на 0,4 м. Пружина растянута на длину 0,4 м, а затем отпущена с начальной скоростью 0. Напиши уравнение, которое описывает положение данного груза в любое время t.

<ACT> 10.2 Дифференциальное уравнение гармонических колебаний имеет вид $0{,}2\frac{d^2y}{dt^2} + 0{,}8y = 0$. Найди:

a) циклическую (круговую) частоту;
b) период колебаний.

</ACT>
<ACT> 10.3 Дифференциальное уравнение гармонических колебаний имеет вид $5\frac{d^2x}{dt^2} + 80x = 0$. Найди:

a) циклическую частоту;
b) период колебаний.

<ACT> 10.2 Тело совершает гармонические колебания по закону $x = 0{,}03\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right)$. Все величины, входящие в уравнение заданы в единицах СИ. Найди:

f) амплитуду колебаний;
g) циклическую частоту;
h) начальную фазу колебаний тела;
i) период колебаний;

</ACT>

<ACT> 10.8 Запиши уравнение колебательного движения точки, совершающей колебания с амплитудой равной 6 см. Известно, что за $t = 1$ мин совершается $n = 240$ колебаний и начальная фаза колебаний равна 30^0.

</ACT>

<ACT> 10.9 Частица движется по прямой линии. В момент времени t ее перемещение x из фиксированной точки O на прямой задано $x = A \sin \omega t$, где A и ω - постоянные.

Покажи, что $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$. </ACT>

1. Укажите решение дифференциального уравнения гармонического колебания $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$.

2. Укажите общую формулу решения дифференциального уравнения гармонического колебания.

3. Укажите формулу вычисления амплитуды гармонического колебания из уравнения $x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$.

4. Груз колеблется по закону $x(t) = 3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$. Определите фазу колебания.

5. Груз колеблется по закону $x(t) = 3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$. Определите амплитуду колебания.

1. Период колебаний материальной точки 2.4 с, амплитуда 5 см, начальная фаза равна нулю. Каковы смещение, скорость и ускорение колеблющейся точки через 0.4 с после начала колебаний? Колебания происходят по закону косинуса.

2. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой А = 4 см и периодом Т = 2с. Написать уравнение движения точки, если ее движение начинается из положения

1. $x = 2.5 \cdot 10^{-2}$ м; $v_x = 0{,}11\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $a_x = -0.17\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; **2.** $x = 0.04\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ м;